

УДК 519.95

М.И.Тельпиз

NP-полнота, суперприведение и проблема четырёх красок

В нотации, основанной на принципе позиционности, продолженном с чисел на функции, показано, что класс *NP*-полных задач совпадает с классом задач *P*. Используемые при этом преобразования позволяют записывать задачи выполнимости в суперприведённой форме. Показано одно из теоретических приложений идеи суперприведения в положительном решении проблемы четырёх красок.

Библиография: 7 наименований.

§ 1. Введение

В этой работе рассматривается задача выполнимости в её классической формулировке [2], требующей ответить: существует ли набор значений переменных, называемый выполняющим, который превращает данную КНФ в истинное высказывание? (Форма называется КНФ, если она является конъюнкцией одного или более конъюнктивных членов, каждый из которых является дизъюнкцией литералов. Литерал — это общее имя для переменной x_j и её отрицание \bar{x}_j). При положительном ответе КНФ называется выполнимой, при отрицательном — невыполнимой (противоречивой); если кроме распознавания выполнимости требуется ещё предъявить выполняющий набор, то задачу называют выполнимой с предъявлением, которую будем иметь ввиду в дальнейшем, кратко записывая **ВЫП**.

Задачу **ВЫП**, разумеется, можно решать перебором, но перебор требует экспоненциальное время на его реализацию. Поэтому следует вести речь о принципиальной возможности найти нужное решение, не перебирая всех или почти всех вариантов в задаче. Стало общепринятым [2] считать переборную задачу, решаемой эффективно, если имеется алгоритм, решающий её за время, ограниченное полиномом от размерности задачи.

Таким образом, можно говорить о классе *NP* всех переборных задач, решаемых за полиномиальное время. Относительно классов *P* и *NP* имеется ряд исследований, но здесь основополагающей является работа [3], в которой С.Кук показал, что проблема выполнимости полна в классе *NP* относительно полиномиальной редукции, или короче, *NP*-полна. Грубо говоря, *NP*-полные проблемы имеют максимальную трудность среди всех проблем перебора. Отсюда следует, что если проблема выполнимости легка, то любая проблема перебора легка (то есть принадлежит к классу *P*). Из более точной формулировки теоремы Кука вытекает даже более сильное утверждение, а именно такое: быстрый алгоритм для решения проблемы выполнимости вполне механическим способом приводил бы к быстрой разрешающей процедуре для любой эффективно заданной проблеме перебора. Такой алгоритм служил бы отмычкой к проблемам перебора из всех областей математики.

Следует отметить, что большинство специалистов полагают, хотя это никто доказать не смог, что *NP*-полные задачи нельзя решать за полиномиальное время. Соображения такие. Если хотя бы для одной *NP*-полной задачи существует решающий её полиномиальный алгоритм, то и для всех *NP*-полных задач такие алгоритмы существуют. В настоящее время известно очень много *NP*-полных задач. Все попытки найти для них полиномиальные алгоритмы оказались безуспешными. По-видимому, таких алгоритмов вовсе нет, полагают они.

И тем не менее, имеются все основания утверждать, что для того, чтобы *NP*-полные задачи имели решение полиномиальным алгоритмом, необходимо используемый в записи

чисел принцип позиционности распространить и на представления функций, с помощью которых записываются условия NP -полной задачи. В случае задачи **ВЫП**, к которым сводятся труднорешаемые задачи, это значит, что принцип позиционности должен быть распространён на представления функций алгебры логики.

Арифметизация функций алгебры логики на базе принципа позиционности, то есть разработка позиционного счисления функций и системы исчисления (системы оперирования с функциями) в позиционном их представлении, началось в первой половине 1978 года и отражено в ряде публикаций (см., например, [4] – [6]). Результаты всех исследований будут представлены в книге "Принцип позиционности для счисления и исчисления функций" (сокращённо [ПП], первый том которой закончен в начале 2001 года). Задача **ВЫП** в книге [ПП] исследована довольно подробно. В этой работе представлено доказательство теоремы о совпадении классов задач NP и P в том его варианте, который был первоначально получен более двух лет назад, точнее, в середине августа 2000 года. Книга ещё не вышла, поэтому необходимый вспомогательный материал извлечён из нее и представлен в том объёме, который достаточен для понимания всех рассуждений и выводов.

Для этой работы эффективное решение задачи **ВЫП** — это главная цель. Но можно полагать, что используемое при этом преобразование, названное суперприведением, возможно более интересно, чем NP -полнота. Чтобы отразить его идею более вышукло, выбрана проблема четырёх красок.

§ 2. Некоторые обозначения и соглашения

Будем рассматривать двоичные n -мерные упорядоченные наборы (векторы размерности n)

$$X_n = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

которые составляют область определения для функций

$$y = f(X_n),$$

значения которых также двоичны, то есть $x_1, x_2, \dots, x_n, y \in \{0, 1\}$.

Бинарные связки из множества

$$O_p = \{\downarrow, \oplus, /, \bar{\cdot}, \bar{\oplus}, \bar{\downarrow}\}$$

будут использоваться для образования функций, называемые соответственно: функция Вебба, сложение по модулю 2, функция Шеффера, конъюнкция, эквивалентность и дизъюнкция, то есть $\bar{\cdot} \Leftrightarrow \&$ (конъюнкция), $\bar{\oplus} \Leftrightarrow \sim$ (эквивалентность), $\bar{\downarrow} \Leftrightarrow \vee$ (дизъюнкция), где \Leftrightarrow означает равенство по определению.

Для записи функций алгебры логики в векторной форме будем использовать систему бинарных продукций (образующих правил) из множества:

$$Q_1 = \{T, \bar{T}, T^*, \bar{T}^*, M, \bar{M}\}.$$

Действие каждой из продукций множества Q_1 на заданный вектор α_j превращает его в конкатенацию двух векторов, так что размерность исходного вектора удваивается:

$$\left. \begin{aligned} \langle \alpha_j T \rangle &\Leftrightarrow \langle \alpha_j \bar{\theta}_j \rangle, & \langle \alpha_j \bar{T} \rangle &\Leftrightarrow \langle \alpha_j \theta_j \rangle, \\ \langle \alpha_j T^* \rangle &\Leftrightarrow \langle \bar{\theta}_j \alpha_j \rangle, & \langle \alpha_j \bar{T}^* \rangle &\Leftrightarrow \langle \theta_j \alpha_j \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\langle \alpha_j M \rangle \Leftrightarrow \langle \alpha_j \alpha_j \rangle, \quad \langle \alpha_j \bar{M} \rangle \Leftrightarrow \langle \alpha_j \bar{\alpha}_j \rangle. \quad (2)$$

В определениях (1) и (2) предполагается, что вектор $\langle \alpha_j \rangle$ является вектором с двоичными координатами порядка j , то есть размерности 2^j и все 2^j координаты векторов $\langle \theta_j \rangle$ и $\langle \bar{\theta}_j \rangle$ суть соответственно нулевые и единичные.

Ниже, как правило, в качестве начальных векторов, к которым применяются произведения из множества Q_1 , будут использоваться векторы

$$\langle \tau_j \rangle \rightleftharpoons \langle \bar{\theta}_j \theta_j \rangle, \quad \langle \bar{\tau}_j \rangle \rightleftharpoons \langle \theta_j \bar{\theta}_j \rangle, \quad \langle \nu_j \rangle \rightleftharpoons \langle \theta_j \theta_j \rangle, \quad \langle \bar{\nu}_j \rangle \rightleftharpoons \langle \bar{\theta}_j \bar{\theta}_j \rangle, \quad (3)$$

но чаще будут использоваться первые два вектора.

Обратим внимание, что поскольку каждое из выражений

$$\left. \begin{aligned} \langle \bar{\alpha}_j \bar{T} \rangle &\rightleftharpoons \langle \bar{\alpha}_j \theta_j \rangle, & \langle \bar{\alpha}_j T \rangle &\rightleftharpoons \langle \bar{\alpha}_j \bar{\theta}_j \rangle, \\ \langle \bar{\alpha}_j \bar{T}^* \rangle &\rightleftharpoons \langle \theta_j \bar{\alpha}_j \rangle, & \langle \bar{\alpha}_j T^* \rangle &\rightleftharpoons \langle \bar{\theta}_j \bar{\alpha}_j \rangle, \\ \langle \bar{\alpha}_j M \rangle &\rightleftharpoons \langle \bar{\alpha}_j \bar{\alpha}_j \rangle, & \langle \bar{\alpha}_j \bar{M} \rangle &\rightleftharpoons \langle \bar{\alpha}_j \alpha_j \rangle \end{aligned} \right\}$$

является инвертированным к каждому из выражений (1) и (2), то тем самым доказана следующая теорема

Теорема 1. Если B – одна из продукций первой четвёрки, а C – одна из двух остальных продукций множества Q_1 , то инвертированными векторами к каждому из заданных векторов $\langle \alpha_j B \rangle$ и $\langle \alpha_j C \rangle$ являются векторы $\langle \bar{\alpha}_j \bar{B} \rangle$ и $\langle \bar{\alpha}_j \bar{C} \rangle$, при этом двойная операция инвертирования ведёт к снятию этой операции.

§ 3. Счисления функций алгебры логики

Если значения функций алгебры логики $f(X_j)$ представимы вектором $\langle \alpha_j \rangle$, то этот факт будем записывать так:

$$f(X_j) \simeq \langle \alpha_j \rangle.$$

Если принять, что в (3) минимальным индексом является нулевой, и

$$\langle \tau \rangle \rightleftharpoons \langle \tau_0 \rangle = \langle \bar{\theta} \theta \rangle, \quad \langle \bar{\tau} \rangle \rightleftharpoons \langle \bar{\tau}_0 \rangle = \langle \theta \bar{\theta} \rangle,$$

то очевидной является следующая лемма.

Лемма 1. Для селекторных функций (проекций) верны соотношения

$$x_{j+1} \simeq \langle \bar{\tau}_j \rangle, \quad \bar{x}_{j+1} \simeq \langle \tau_j \rangle.$$

Для записи функций алгебры логики с использованием классических бинарных операций из множества O_p будем применять следующую теорему.

Теорема 2. Если функция алгебры логики $f(X_j)$ представима вектором $\langle \alpha_j \rangle$, то тогда следующие ниже функции с областью определения X_{j+1} представимы так:

$$\begin{aligned} f(X_{j+1}) &= f(X_j) \simeq \langle \alpha_j M \rangle, \\ f(X_j) \downarrow x_{j+1} &\simeq \langle \bar{\alpha}_j \bar{T} \rangle, & f(X_j) \downarrow \bar{x}_{j+1} &\simeq \langle \bar{\alpha}_j \bar{T}^* \rangle, \\ f(X_j) \oplus x_{j+1} &\simeq \langle \alpha_j \bar{M} \rangle, & f(X_j) \oplus \bar{x}_{j+1} &\simeq \langle \bar{\alpha}_j \bar{M} \rangle, \\ f(X_j) / x_{j+1} &\simeq \langle \bar{\alpha}_j T^* \rangle, & f(X_j) / \bar{x}_{j+1} &\simeq \langle \bar{\alpha}_j T \rangle, \\ f(X_j) / x_{j+1} &\simeq \langle \alpha_j \bar{T}^* \rangle, & f(X_j) / \bar{x}_{j+1} &\simeq \langle \alpha_j \bar{T} \rangle, \\ f(X_j) \bar{\oplus} x_{j+1} &\simeq \langle \bar{\alpha}_j \bar{M} \rangle, & f(X_j) \bar{\oplus} \bar{x}_{j+1} &\simeq \langle \alpha_j \bar{M} \rangle, \\ f(X_j) \bar{\downarrow} x_{j+1} &\simeq \langle \alpha_j T \rangle, & f(X_j) \bar{\downarrow} \bar{x}_{j+1} &\simeq \langle \alpha_j T^* \rangle. \end{aligned}$$

Доказательство. Верность первого соотношения следует из того, что поскольку область определения увеличилась вдвое, то битовую длину вектора следует циклически повторить, что и записано в правой части. Остальные соотношения получаются в результате выполнения прямых выкладок, которые могут быть без труда повторены так, как это сделано на примере первого и последнего соотношений:

$$\begin{aligned} f(X_j) \downarrow x_{j+1} &\simeq \langle \alpha_j \alpha_j \rangle \downarrow \langle \theta_j \bar{\theta}_j \rangle = \langle \bar{\alpha}_j \theta_j \rangle = \langle \bar{\alpha}_j \bar{T} \rangle, \\ f(X_j) \bar{\downarrow} \bar{x}_{j+1} &\simeq \langle \alpha_j \alpha_j \rangle \bar{\downarrow} \langle \bar{\theta}_j \theta_j \rangle = \langle \bar{\theta}_j \alpha_j \rangle = \langle \alpha_j T^* \rangle. \end{aligned}$$

Используя лемму 1 и теорему 2, можно строить векторы, которыми представлены функции алгебры логики. Например, полагая, что операции выполняются в порядке их следования, находим:

$$\begin{aligned} \bar{x}_2 \bar{\downarrow} \bar{x}_3 \bar{\downarrow} x_6 \bar{\downarrow} x_7 &\simeq \langle \tau_1 T^* M M T T \rangle, \\ \bar{x}_4 \bar{\downarrow} x_5 \bar{\downarrow} \bar{x}_8 &\simeq \langle \tau_3 \bar{T}^* M M \bar{T} \rangle, \\ x_3 \downarrow \bar{x}_5 \downarrow x_6 \downarrow \bar{x}_7 &\simeq \langle \tau_2 M \bar{T}^* T \bar{T}^* \rangle, \\ x_1 \bar{\downarrow} x_3 \bar{\downarrow} \bar{x}_4 \bar{\downarrow} x_6 &\simeq \langle \tau M T^* \bar{T}^* M T^* \rangle. \end{aligned}$$

Для дальнейшего, кроме множества продукций Q_1 , необходимо выделить следующие его подмножества

$$Q_2 = \{T, \bar{T}, T^*, \bar{T}^*, M\}, \quad Q_3 = \{T, T^*, M\}, \quad Q_4 = \{\bar{T}, \bar{T}^*, M\}.$$

Поскольку в связи с задачей **ВЫП** особый интерес составляют **КНФ**, то счислению этих форм придадим табличный вид. Для этого представим вектором в системе продукций Q_3 каждую дизъюнкцию **КНФ** и разместим такой вектор в отдельной строке таблицы. Число столбцов таблицы совпадает с числом переменных, а число строк совпадает с числом дизъюнкций. Заполнение таблицы осуществляется так.

Для каждой дизъюнкции литералу с минимальным индексом i ставится в соответствие $\bar{\tau}_{i-1}$, если — это x_i , и τ_{i-1} для \bar{x}_i . Эти начала записываются в $(i-1)$ -ом столбце. В остальных столбцах правее $(i-1)$ -го и записываем T в j -ом столбце, если в дизъюнкции входит x_{j+1} и записываем T^* для \bar{x}_{j+1} . Если в дизъюнкции литерала с индексом $j+1$ нет, следует подразумевать продукцию M , хотя фактически её записывать не будем (запись продукции M будет осуществляться лишь в тех случаях, где может возникнуть недоразумение). Принимаем, что векторы, занимающие каждый по строке в таблице, соединены конъюнктивно. В строках таблицы индекс τ или $\bar{\tau}$ опущен, но он предполагается равным номеру столбца. Такой способ заполнения таблицы выполнен в полном соответствии с леммой 1 и теоремой 2.

Для векторов таблицы будем использовать понятия: длина строки и ранг строки. Длина строки таблицы с n столбцами $0, 1, 2, \dots, n-1$ и с началом τ_{i-1} или $\bar{\tau}_{i-1}$ равна $n-i+1$, а ранг равен $n-i-k+1$, где k — сумма продукций M (записанных или подразумеваемых) в строке, то есть ранг строки совпадает с числом литералов, входящих в дизъюнкцию.

Если к векторам $\langle \tau_j \rangle$ или $\langle \bar{\tau}_j \rangle$ применять продукции из некоторой заданной системы Q , то полученные таким образом векторы будут называться FS -векторами в системе Q . Когда система продукций не упоминается, то она подразумевается и понятна из контекста.

Таблица называется двойственной к таблице задачи **ВЫП**, если в ней произведена замена τ на $\bar{\tau}$, $\bar{\tau}$ на τ , T на \bar{T} и T^* на \bar{T}^* и, кроме того, принимается, что FS -векторы, занимающие каждый по строке в таблице, соединены дизъюнктивно.

§ 4. Фрагменты исчисления FS -векторов в системе Q_2

Для задач **ВЫП** в первую очередь представляют интерес конъюнкции над FS -векторами в системе Q_3 , но поскольку возникает необходимость в преобразованиях над векторами, то появляется надобность в дизъюнкциях над FS -векторами в системе Q_4 . Объединение систем Q_3 и Q_4 даёт систему Q_2 , а поэтому мы рассматриваем конъюнкции и дизъюнкции над FS -векторами в системе Q_2 .

Все равенства, которые записаны ниже, получаются прямыми выкладками.

$$\begin{aligned}\langle \alpha_j T \rangle \bar{\wedge} \langle \beta_j T \rangle &= \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{\wedge} \langle \beta_j \rangle) T \rangle, \\ \langle \alpha_j M \rangle \bar{\wedge} \langle \beta_j M \rangle &= \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{\wedge} \langle \beta_j \rangle) M \rangle, \\ \langle \alpha_j T^* \rangle \bar{\wedge} \langle \beta_j T^* \rangle &= \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{\wedge} \langle \beta_j \rangle) T^* \rangle.\end{aligned}\tag{4}$$

$$\begin{aligned}\langle \alpha_j \bar{T} \rangle \bar{\wedge} \langle \beta_j \bar{T} \rangle &= \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{\wedge} \langle \beta_j \rangle) \bar{T} \rangle, \\ \langle \alpha_j \bar{T} \rangle \bar{\wedge} \langle \beta_j T \rangle &= \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{\wedge} \langle \beta_j \rangle) \bar{T} \rangle, \\ \langle \alpha_j \bar{T}^* \rangle \bar{\wedge} \langle \beta_j \bar{T}^* \rangle &= \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{\wedge} \langle \beta_j \rangle) \bar{T}^* \rangle, \\ \langle \alpha_j \bar{T}^* \rangle \bar{\wedge} \langle \beta_j T^* \rangle &= \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{\wedge} \langle \beta_j \rangle) \bar{T}^* \rangle.\end{aligned}\tag{5}$$

$$\begin{aligned}\langle \alpha_j \bar{T} \rangle \bar{\wedge} \langle \beta_j M \rangle &= \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{\wedge} \langle \beta_j \rangle) \bar{T} \rangle, \\ \langle \alpha_j \bar{T}^* \rangle \bar{\wedge} \langle \beta_j M \rangle &= \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{\wedge} \langle \beta_j \rangle) \bar{T}^* \rangle.\end{aligned}\tag{6}$$

$$\begin{aligned}\langle \alpha_j \bar{T} \rangle \bar{\wedge} \langle \beta_j T^* \rangle &= \langle \alpha_j \bar{T} \rangle, \\ \langle \alpha_j \bar{T} \rangle \bar{\wedge} \langle \beta_j T \rangle &= \langle \alpha_j \bar{T}^* \rangle.\end{aligned}\tag{7}$$

$$\langle \alpha_j \bar{T} \rangle \bar{\wedge} \langle \beta_j \bar{T}^* \rangle = \langle \theta_{j+1} \rangle.\tag{8}$$

Таблица 1

$\bar{\wedge}$	$\alpha_j T$	$\alpha_j T^*$	$\alpha_j \bar{T}$	$\alpha_j \bar{T}^*$	$\alpha_j M$
τ_j	$\alpha_j \bar{T}$	τ_j	$\alpha_j \bar{T}$	ν_j	$\alpha_j \bar{T}$
$\bar{\tau}_j$	$\bar{\tau}_j$	$\alpha_j \bar{T}^*$	ν_j	$\alpha_j \bar{T}^*$	$\alpha_j \bar{T}^*$

$$\begin{aligned}\langle \alpha_j \bar{T} \rangle \bar{\vee} \langle \beta_j \bar{T} \rangle &= \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{\vee} \langle \beta_j \rangle) \bar{T} \rangle, \\ \langle \alpha_j M \rangle \bar{\vee} \langle \beta_j M \rangle &= \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{\vee} \langle \beta_j \rangle) M \rangle, \\ \langle \alpha_j \bar{T}^* \rangle \bar{\vee} \langle \beta_j \bar{T}^* \rangle &= \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{\vee} \langle \beta_j \rangle) \bar{T}^* \rangle.\end{aligned}\tag{9}$$

$$\begin{aligned}\langle \alpha_j T \rangle \bar{\vee} \langle \beta_j T \rangle &= \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{\vee} \langle \beta_j \rangle) T \rangle, \\ \langle \alpha_j T \rangle \bar{\vee} \langle \beta_j \bar{T} \rangle &= \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{\vee} \langle \beta_j \rangle) T \rangle, \\ \langle \alpha_j T^* \rangle \bar{\vee} \langle \beta_j T^* \rangle &= \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{\vee} \langle \beta_j \rangle) T^* \rangle, \\ \langle \alpha_j T^* \rangle \bar{\vee} \langle \beta_j \bar{T}^* \rangle &= \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{\vee} \langle \beta_j \rangle) T^* \rangle.\end{aligned}\tag{10}$$

$$\begin{aligned}\langle \alpha_j T \rangle \bar{\vee} \langle \beta_j M \rangle &= \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{\vee} \langle \beta_j \rangle) T \rangle, \\ \langle \alpha_j T^* \rangle \bar{\vee} \langle \beta_j M \rangle &= \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{\vee} \langle \beta_j \rangle) T^* \rangle.\end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}\langle \alpha_j T \rangle \bar{\downarrow} \langle \beta_j \bar{T}^* \rangle &= \langle \alpha_j T \rangle, \\ \langle \alpha_j T^* \rangle \bar{\downarrow} \langle \beta_j \bar{T} \rangle &= \langle \alpha_j T^* \rangle.\end{aligned}\tag{12}$$

$$\langle \alpha_j T \rangle \bar{\downarrow} \langle \beta_j T^* \rangle = \langle \bar{\theta}_{j+1} \rangle.\tag{13}$$

Таблица 2

$\bar{\downarrow}$	$\alpha_j \bar{T}$	$\alpha_j \bar{T}^*$	$\alpha_j T$	$\alpha_j T^*$	$\alpha_j M$
$\bar{\tau}_j$	$\alpha_j T$	$\bar{\tau}_j$	$\alpha_j T$	$\bar{\nu}_j$	$\alpha_j T$
τ_j	τ_j	$\alpha_j T^*$	$\bar{\nu}_j$	$\alpha_j T^*$	$\alpha_j T^*$

Обратим внимание на то, что равенства (9) — (13) и таблица 2 соответствуют равенствам (4) — (8) и таблице 1. Кроме того, равенства (4) и соответствующие им равенства (9) суть равенства в системах Q_3 и Q_4 соответственно, но они не составляют полного списка для этих систем, т.е. для полного списка следует добавить следующие равенства:

$$\begin{aligned}\langle \alpha_j T \rangle \bar{\uparrow} \langle \beta_j M \rangle &= \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{\uparrow} \langle \beta_j \rangle) T \rangle \bar{\uparrow} \langle \beta_j M \rangle = \\ &= \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{\uparrow} \langle \beta_j \rangle) T \rangle \bar{\uparrow} \langle \beta_j T^* \rangle, \\ \langle \alpha_j T^* \rangle \bar{\uparrow} \langle \beta_j M \rangle &= \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{\uparrow} \langle \beta_j \rangle) T^* \rangle \bar{\uparrow} \langle \beta_j M \rangle = \\ &= \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{\uparrow} \langle \beta_j \rangle) T^* \rangle \bar{\uparrow} \langle \beta_j T \rangle,\end{aligned}\tag{14}$$

$$\begin{aligned}\langle \alpha_j \bar{T} \rangle \bar{\downarrow} \langle \beta_j M \rangle &= \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{\downarrow} \langle \beta_j \rangle) \bar{T} \rangle \bar{\downarrow} \langle \beta_j M \rangle = \\ &= \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{\downarrow} \langle \beta_j \rangle) \bar{T} \rangle \bar{\downarrow} \langle \beta_j \bar{T}^* \rangle, \\ \langle \alpha_j \bar{T}^* \rangle \bar{\downarrow} \langle \beta_j M \rangle &= \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{\downarrow} \langle \beta_j \rangle) \bar{T}^* \rangle \bar{\downarrow} \langle \beta_j M \rangle = \\ &= \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{\downarrow} \langle \beta_j \rangle) \bar{T}^* \rangle \bar{\downarrow} \langle \beta_j \bar{T} \rangle\end{aligned}\tag{15}$$

и равенство, устанавливающее связь между конъюнкцией и дизъюнкцией

$$\langle \alpha_j T \rangle \bar{\uparrow} \langle \beta_j T^* \rangle = \langle \alpha_j \bar{T} \rangle \bar{\downarrow} \langle \beta_j \bar{T}^* \rangle.\tag{16}$$

Будем говорить, что в системе Q два FS -вектора сворачиваются (в заданной логической операции $\odot \in O_p$, которая может задаваться или подразумеваться) в один, если результирующий вектор является FS -вектором в системе Q .

Ниже рассмотрим свёртки FS -векторов системы продукций Q_2 в $\odot \in \{\bar{\uparrow}, \bar{\downarrow}\}$.

4.1. Конъюнкция. Рассмотрим вопрос о свёртке в конъюнкцию FS -векторов на системе продукций Q_2 . В этой системе продукций будем говорить, что два FS -вектора в конъюнкции согласованы, если у них нет такого столбца, в котором одна продукция T , а другая — T^* . Конъюнкция над согласованными FS -векторами в системе Q_2 охватывается равенствами (4) — (8), (14) и таблицей 1.

Из перечисленных равенств видно, что проблема свёртки возникает лишь в случае выхода на равенство (14), то есть когда имеются столбцы, в которых одна продукция M , а другая T или T^* (здесь и чуть выше говорим о столбцах, подразумевая табличную запись векторов, принятую в §3). Если таких столбцов нет, то проблемы свёртки нет, и конъюнкция над парой FS -векторов выполняется по нижеследующему упрощённому правилу, являющемуся следствием равенств (4) — (8) и таблицы 1.

Упрощённое правило конъюнкции. Результирующий вектор пары согласованных векторов строится справа налево по столбцам так. Если обе продукции в столбце совпадают, то эта продукция сохраняется и в результирующем векторе, а если только одна продукция имеет знак инвертирования, то она со своим знаком инвертирования и переносится в результирующий вектор. И это следует продолжать до тех пор, пока не обнаружится, что в некотором i -ом столбце имеем:

- 1) в одном векторе продукцию \bar{T} , а в другом — \bar{T}^* ;
- 2) начала обоих векторов и эти начала разные;
- 3) начала обоих векторов и эти начала совпадают;
- 4) начало только одного вектора.

Тогда в случаях 1) и 2) в i -ом столбце записываем ν и применяем к нему записанные справа продукции до тех пор, пока не получим τ или $\bar{\tau}$ (разумеется, это произойдёт в столбце, расположенном правее i -го, иначе просто результирующий вектор есть θ). В случае 3) начало результирующего совпадает с началом исходных векторов. В случае 4) выполняем конъюнкцию по таблице 1 над началом одного вектора и подвектором другого (здесь имеется ввиду часть вектора от начала до i -го столбца включительно) и полученный результат становится соответствующим подвектором результирующего. При этом, если такой подвектор есть $\langle \nu \rangle$, то поступаем так же, как и в 1) и 2).

Иллюстрационные примеры. Применение упрощенного правила конъюнкции (по примеру на первые три случая соответственно и два примера на четвертый случай):

$$1) \quad \langle \bar{\bar{}} \rangle \quad \begin{array}{l} \langle \tau \quad M \quad \bar{T}^* \quad M \quad T \quad M \quad T^* \rangle \\ \langle \tau \quad \bar{T}^* \quad \bar{T} \quad M \quad T \quad \bar{T} \quad T^* \rangle \\ \hline \langle \quad \quad \nu_2 \quad M \quad T \quad \bar{T} \quad T^* \rangle = \langle \bar{\tau}_4 \quad \bar{T} \quad T^* \rangle. \end{array}$$

$$2) \quad \langle \bar{\bar{}} \rangle \quad \begin{array}{l} \langle \tau_5 \quad M \quad T \quad T^* \quad T \quad M \quad T \rangle \\ \langle \bar{\tau}_5 \quad \bar{T}^* \quad T \quad \bar{T}^* \quad \bar{T} \quad M \quad T \rangle \\ \hline \langle \nu_5 \quad \bar{T}^* \quad T \quad \bar{T}^* \quad \bar{T} \quad M \quad T \rangle = \langle \bar{\tau}_7 \quad \bar{T}^* \quad \bar{T} \quad M \quad T \rangle. \end{array}$$

$$3) \quad \langle \bar{\bar{}} \rangle \quad \begin{array}{l} \langle \tau_3 \quad M \quad \bar{T} \quad \bar{T} \quad \bar{T}^* \quad T \quad T^* \rangle \\ \langle \tau_3 \quad \bar{T}^* \quad M \quad \bar{T} \quad T^* \quad T \quad T^* \rangle \\ \hline \langle \tau_3 \quad \bar{T}^* \quad \bar{T} \quad \bar{T} \quad \bar{T}^* \quad T \quad T^* \rangle. \end{array}$$

$$4) \quad \langle \bar{\bar{}} \rangle \quad \begin{array}{l} \langle \tau_2 \quad T \quad T^* \quad M \quad T \quad \bar{T} \quad M \quad T^* \rangle \\ \langle \quad \quad \quad \tau_5 \quad \bar{T} \quad \bar{T} \quad \bar{T}^* \quad T^* \rangle \\ \hline \langle \tau_2 \quad T \quad T^* \quad \bar{T} \quad \bar{T} \quad \bar{T} \quad \bar{T}^* \quad T^* \rangle. \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
5) \quad \langle \bar{\nu} \rangle \quad \langle \tau_6 \quad T^* \quad \bar{T}^* \quad T \quad \bar{T}^* \quad M \quad T^* \rangle \\
\quad \quad \quad \quad \quad \quad \langle \quad \quad \quad \tau_8 \quad \bar{T} \quad M \quad M \quad T^* \rangle \\
\quad \quad \quad \quad \quad \quad \hline
\quad \quad \quad \quad \quad \quad \langle \quad \quad \quad \nu_8 \quad \bar{T} \quad \bar{T}^* \quad M \quad T^* \rangle = \langle \tau_{12} \rangle.
\end{array}$$

4.2. Дизъюнкция. Сравнивая равенства (9) — (13), (15) и таблицу 2 с соответствующими равенствами (4) — (8), (14) и таблицей 1, наблюдаем их двойственность, поэтому всё, что будет приведено ниже, является отражением этой двойственности.

Будем говорить, что два FS -вектора в дизъюнкции согласованы, если у них нет такого столбца, в котором одна продукция \bar{T} , а другая — \bar{T}^* .

Дизъюнкция над согласованными FS -векторами в системе Q_2 охватывается равенствами (9) — (13), (15) и таблицей 2. Из перечисленных равенств видно, что проблема свёртки возникает лишь в случаях выхода на равенства (15), то есть когда имеются столбцы, в которых одна продукция M , а другая \bar{T} или \bar{T}^* . Если таких столбцов нет, то проблемы свёртки для дизъюнкции нет, и дизъюнкция над парой FS -векторов выполняется по нижеследующему упрощённому правилу, являющемуся следствием равенств (9) — (13) и таблицы 2.

Упрощённое правило дизъюнкции. Результирующий вектор пары согласованных векторов строится справа налево по столбцам так. Если обе продукции в столбце совпадают, то эта продукция сохраняется и в результирующем векторе, а если только одна из продукций есть T (или T^*), а другая — произвольная, то эта продукция T (или T^*) переносится в результирующий вектор. И это следует продолжать до тех пор, пока не обнаружится, что в некотором i -ом столбце имеем:

- 1) в одном векторе продукцию T , а в другом — T^* ;
- 2) начала обоих векторов и эти начала разные;
- 3) начала обоих векторов и эти начала совпадают;
- 4) начало только одного вектора.

Тогда в случаях 1) и 2) в i -ом столбце записываем $\bar{\nu}$ и применяем к нему записанные справа продукции до тех пор, пока не получим τ или $\bar{\tau}$ (разумеется, это произойдёт в столбце, расположенном правее i -го, иначе просто результирующий вектор есть $\bar{\theta}$). В случае 3) начало результирующего совпадёт с началом исходных векторов. В случае 4) выполняем дизъюнкцию по таблице 2 над началом одного вектора и продолжением другого (здесь имеется ввиду часть вектора от начала до i -го столбца включительно) и полученный результат становится соответствующим подвектором результирующего. При этом, если такой подвектор есть $\langle \bar{\nu} \rangle$, то поступаем так же, как и в 1) и 2).

4.3. Конъюнкционная резолюция. Как мы знаем, проблема свёртки в конъюнкции для двух согласованных FS -векторов возникает, когда имеются такие столбцы, в которых одна продукция M , а другая T или T^* . Будем называть такие столбцы проблемными для конъюнкции.

Если у заданной пары согласованных FS -векторов имеются проблемные для конъюнкции столбцы, то для таких векторов вместо конъюнкции можно строить конъюнкционную резолюцию, которую определим ниже.

Рассмотрим сначала, как строить такую резолюцию для двух FS -векторов $\langle A \rangle$ и $\langle B \rangle$, каждый из которых задан в системе продукций Q_3 и первый слева направо проблемный столбец у них есть столбец с номером k .

Запишем каждый из рассматриваемых FS -векторов в виде дизъюнкции:

$$\langle A \rangle = \langle \alpha \rangle \bar{\downarrow} \langle a \rangle, \quad \langle B \rangle = \langle \beta \rangle \bar{\downarrow} \langle b \rangle, \quad (17)$$

где $\langle \alpha \rangle$ и $\langle \beta \rangle$ суть FS -векторы, совпадающие соответственно от начала и до k -го столбца (исключительно) с заданными векторами $\langle A \rangle$ и $\langle B \rangle$, а с k -го столбца и до последнего у них все продукции заменены на продукцию M . Что касается FS -векторов $\langle a \rangle$ и $\langle b \rangle$, то — это те векторы, которые получаются в результате удаления всех продукции от начала и до k -го столбца.

Теперь по FS -векторам (17) строим вектор конъюнкционной резолюции, определив его так:

$$\langle R \rangle = \langle \alpha \rangle \bar{\uparrow} \langle \beta \rangle \bar{\downarrow} \langle a \rangle \bar{\downarrow} \langle b \rangle. \quad (18)$$

Проблем со свёрткой FS -векторов правой части равенства (18) возникнуть не может в силу их определения, но вектор конъюнктивной резолюции $\langle R \rangle$ не обязан быть FS -вектором в системе Q_3 : он может быть и FS -вектором в системе Q_2 . Иллюстрацией к сказанному может служить такой пример.

Пусть заданы FS -векторы

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \langle \bar{\tau}_j \quad T \quad M \quad T^* \quad M \quad T \quad M \quad T \quad M \rangle, \\ \langle B \rangle &= \langle \quad \tau_{j+2} \quad T^* \quad M \quad M \quad T^* \quad T \quad T^* \rangle, \end{aligned}$$

в конъюнкции которых первым проблемным столбцом с номером $k = j + 5$, а поэтому

$$\begin{aligned} \langle \alpha \rangle &= \langle \tau_j \quad T \quad M \quad T^* \quad M \quad M \quad M \quad M \quad M \rangle, & \langle a \rangle &= \langle \bar{\tau}_{j+5} \quad M \quad T \quad M \rangle, \\ \langle \beta \rangle &= \langle \quad \tau_{j+2} \quad T^* \quad M \quad M \quad M \quad M \quad M \rangle, & \langle b \rangle &= \langle \quad \tau_{j+6} \quad T \quad T^* \rangle, \\ \langle \alpha \rangle \bar{\uparrow} \langle \beta \rangle &= \langle \tau_j T \bar{T} T^* M M M M M \rangle, & \langle a \rangle \bar{\downarrow} \langle b \rangle &= \langle \bar{\tau}_{j+5} T^* T T^* \rangle, \\ \langle R \rangle &= \langle \tau_j T \bar{T} T^* M T T^* T T^* \rangle. \end{aligned}$$

Разумеется, что по векторам (17) конъюнкционную резолюцию (18) можно строить, не выполняя всех промежуточных выкладок, которые представлены в примере, поняв, что достаточно придерживаться следующего очевидного правила, являющегося следствием всех описанных конструкций.

FS -вектор конъюнкционной резолюции $\langle R \rangle$ можно получить, если над заданными векторами $\langle A \rangle$ и $\langle B \rangle$ справа налево по столбцам от конца и до k -го столбца (включительно) выполнить упрощённую дизъюнцию, а с $(k - 1)$ -го и до начала — упрощённую конъюнцию.

Истинная роль конъюнкционной резолюции будет раскрыта ниже, но здесь отметим леммой следующее её свойство.

Лемма 2. Если заданы два согласованных в конъюнкции FS -вектора $\langle A \rangle$ и $\langle B \rangle$, а по ним построен FS -вектор конъюнкционной резолюции $\langle R \rangle$, то верно равенство:

$$\langle A \rangle \bar{\uparrow} \langle B \rangle = \langle A \rangle \bar{\uparrow} \langle B \rangle \bar{\uparrow} \langle R \rangle. \quad (19)$$

Верность этой леммы получается простыми выкладками над правой и левой частями равенства (19), имея при этом ввиду (17) и (18).

Теперь рассмотрим общий случай конъюнкционной резолюции FS -векторов $\langle A \rangle$ и $\langle B \rangle$, каждый из которых уже задан в системе продукции Q_2 . Как ни странно, но в этом случае правило построения FS -вектора конъюнкционной резолюции $\langle R \rangle$ проще.

Общее правило конъюнкционной резолюции. Для заданных согласованных в конъюнкции FS -векторов $\langle A \rangle$ и $\langle B \rangle$ в системе продукций Q_2 FS -вектор конъюнкционной резолюции $\langle R \rangle$ строится от конца справа налево по столбцам, при этом выполняется упрощённая дизъюнкция только над проблемными в конъюнкции столбцами, а над всеми остальными выполняется упрощённая конъюнкция.

Рассмотрим иллюстрационный пример.

$$\begin{aligned}\langle A \rangle &= \langle \tau_j \bar{T} \quad M \quad T^* \quad M \quad T \quad \bar{T}^* \quad \bar{T} \quad M \quad M \quad \bar{T} \quad \bar{T}^* \quad T \quad M \rangle, \\ \langle B \rangle &= \langle \quad \bar{\tau}_{j+2} \quad T^* \quad M \quad M \quad \bar{T}^* \quad M \quad T \quad \bar{T}^* \quad \bar{T} \quad M \quad T \quad T^* \rangle, \\ \langle R \rangle &= \langle \tau_j \bar{T} \quad \bar{T}^* \quad T^* \quad M \quad T \quad \bar{T}^* \quad \bar{T} \quad T \quad \bar{T}^* \quad \bar{T} \quad \bar{T}^* \quad T \quad T^* \rangle.\end{aligned}$$

В этом примере вектор $\langle R \rangle$ построен в соответствии с общим правилом: столбцами, проблемными для конъюнкции, являются столбцы с номерами $j + 5$, $j + 8$ и $j + 13$. В этих столбцах выполнена дизъюнкция над продуктами, приведшая к продукциям T, T, T^* соответственно. Во всех остальных выполнена конъюнкция по упрощённому правилу.

Для обоснования результата этого примера, найдём правее k -го столбца (в нашем случае правее $(j + 5)$ -го столбца) проблемные для дизъюнкции столбцы. Таковыми являются столбцы с номерами $j + 7$, $j + 9$ и $j + 11$. Эти столбцы и начальные столбцы векторов $\langle A \rangle$ и $\langle B \rangle$, то есть с номерами j и $j + 2$, указывают на начала тех векторов, которые в конъюнкции должны дать векторы $\langle A \rangle$ и $\langle B \rangle$. Итак, имеем:

$$\begin{aligned}\langle a \rangle &= \langle \tau_j \bar{T} \quad M \quad T^* \quad M \quad T \quad \bar{T}^* \quad M \quad M \quad M \quad \bar{T} \quad M \quad T \quad M \rangle, \\ \langle b \rangle &= \langle \quad \bar{\tau}_{j+2} \quad T^* \quad M \quad M \quad \bar{T}^* \quad M \quad T \quad M \quad \bar{T} \quad M \quad T \quad T^* \rangle, \\ \langle a_1 \rangle &= \langle \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \tau_{j+7} \quad M \quad M \quad \bar{T} \quad M \quad T \quad M \rangle, \\ \langle b_1 \rangle &= \langle \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \bar{\tau}_{j+9} \quad \bar{T} \quad M \quad T \quad T^* \rangle, \\ \langle a_2 \rangle &= \langle \quad \bar{\tau}_{j+11} \quad T \quad M \rangle,\end{aligned}$$

где принято следование векторов по убыванию их длины и $\langle A \rangle = \langle a \rangle \bar{\langle a_1 \rangle} \bar{\langle a_2 \rangle}$, $\langle B \rangle = \langle b \rangle \bar{\langle b_1 \rangle}$.

Если теперь находить конъюнкционную резолюцию (по частному, но уже обоснованному выше правилу) над каждой парой векторов, начав с первых двух, а затем над результирующим и последующим, то в конечном результате получим тот вектор $\langle R \rangle$, который получили, используя общее правило конъюнкционной резолюции. И хотя здесь приведено обоснование частного примера, легко понять, что такое обоснование носит общий характер и его изложение в принципе не отличается от уже приведённого.

Если руководствоваться принципом симметрии, то следовало бы далее определить дизъюнкционную резолюцию (тем более, что принцип двойственности подсказывает, как это следует делать), но поскольку ближайшей целью является задача **ВЫП**, то этого здесь делать не будем.

В дальнейшем, говоря о резолюции, по умолчанию будем подразумевать конъюнкционную резолюцию.

§ 5. Анализ таблицы задачи ВЬП

В §3 сказано, как можно задаче **ВЬП** придать табличный вид. Поэтому в дальнейшем вместо того, чтобы говорить "таблица задачи **ВЬП**" для краткости будем говорить просто **таблица ВЬП** или ещё короче — "таблица". Итак, полагаем, что таблица **ВЬП** имеет n столбцов и m строк. Для нумерации столбцов будут использоваться две служебные строки: одна (**I**) с неизменными номерами от 0 до $n - 1$, указывающая на номер столбца в анализируемой таблице, а другая (**II**), расположенная над ней, с собственными номерами столбцов, то есть при перестановке столбцов (всегда переставляется весь столбец таблицы) переставляются и номера в этой строке. Над этими двумя служебными строками располагается третья служебная строка (**III**), в которой будут указываться исходы анализа таблицы, о чем будет говориться ниже.

Обращаем внимание, что **III** служебная строка повторяется в таблице столько раз, сколько вариантов анализа проводится над таблицей, а в тех случаях, когда в таблице столбцы не переставляются, **II** служебная строка может опускаться.

Сущность анализа таблицы заключается в выделении ведущего столбца, изучения его содержания, выделения подтаблицы, над которой продолжаем анализ. Начальным ведущим столбцом является весь самый правый столбец таблицы, то есть столбец с номером $n - 1$.

Хотя в исходной таблице **ВЬП** все строки содержат FS -векторы в системе Q_3 , но поскольку над векторами таблицы будут выполняться преобразования, которые выводят за указанную систему и укладываются в систему Q_2 , то анализ будет касаться FS -векторов в системе Q_2 .

При анализе ведущего столбца фиксируем один из шести возможных исходов, зависящих от перечня продукций, составляющих этот столбец. Проверка должна осуществляться в указанной ниже последовательности до первого ответа "да" на вопросы:

содержится ли в ведущем столбце с номером k

1) хотя бы по одной клетке с

- а) τ и $\bar{\tau}$;
- б) $\bar{\tau}$ и \bar{T} ;
- в) τ и \bar{T}^* ;
- г) \bar{T} и \bar{T}^* ;

2) только клетки с

- а) $\bar{\tau}$ и T ;
- б) T ;

3) только клетки с

- а) τ и T^* ;
- б) T^* ;

4) хотя бы одна клетка с

- а) $\bar{\tau}$, но имеются клетки с T^* или (и) M ;
- б) \bar{T}^* ;

при этом в подисходах **а)** и **б)** могут быть или не быть продукции T ;

5) хотя бы одна клетка с

а) τ , но имеются клетки с T или (и) M ;

б) \bar{T} ;

при этом в подисходах **а)** и **б)** могут быть или не быть продукции T^* ;

6) во всех клетках

а) имеются только продукции M ;

б) не имеет место ни один из предыдущих исходов и подисходов.

Результаты анализа (номера исходов) записываются в **III** служебную строку, если этот номер не **6**. В том случае, когда имеется исход **6 а)** в **III** служебную строку записываем M , а в случае **6 б)** записываем T или T^* (строго говоря, выбор является произвольным, но следует его указать в алгоритме).

Перед тем как перейти к анализу ведущего столбца с номером $k - 1$ (к такому анализу переходим лишь в том случае, когда номер исхода для k -го столбца больше 3), произведём разбивку таблицы, условно исключив из неё строки (строка считается условно исключённой, если в отведённом с правой стороны таблицы служебном столбце против неё указан номер ведущего столбца из **I** служебной строки) в соответствии с номером исхода, а именно, для исходов с номером:

4) исключаются строки с продуктами $\bar{\tau}$ и T ,

5) исключаются строки с продуктами τ и T^* ,

6) в случае **а)** никаких строк не исключается, а в случае **б)** исключаются строки с той продукцией, которая выбрана в служебной строке, соответствующей этому исходу.

Обращаем внимание, что в перечне исходов имеются литеры, но в служебной строке **III** эти литеры могут лишь подразумеваться, но они не указываются, что не может привести ни к каким недоразумениям.

Анализ начинается со столбца с номером $n-1$, а заканчивается (или прерывается) по достижению столбца с номером исхода **2)** или **3)**, когда имеется выполнимость решаемой задачи. В случае выхода на исход **1)** над парой согласованных векторов, обеспечившие исход **1)**, выполняется преобразование, которое приводит:

1) либо к переходу на столбец, расположенный правее ведущего, и с которого продолжается анализ;

2) либо к оператору $\langle \nu \rangle$, означающий противоречивость задачи **ВЫП**, представленной в таблице.

В случае выполнимости выполняющий набор (наборы) строится (строится) по **III** служебной строке, но подробности в алгоритме ниже.

Упрощённый анализ. Такой анализ совпадает с общим (изложенным выше) почти во всём, но его упрощённость достигается за счёт того, что в нём накладываются два дополнительных требования. Первое требование относится к исходной таблице задачи **ВЫП**: строки в исходной таблице должны следовать одна за другой в порядке убывания их длины. Второе требование: те дополнительные векторы, которые будут получаться в результате некоторой выкладки, диктуемой алгоритмом, должны вноситься в дополнение к исходной таблице. А это значит, что в анализе исходной таблицы следует исходить

из того, что FS -векторы заданы в системе продукций Q_3 . Последнее означает, что перечень из шести возможных исходов в общем анализе сохраняется, но из самих пунктов перечня должно быть исключено упоминание о продукциях \bar{T} и \bar{T}^* , то есть в исходах 1), 4) и 5) сохраняется лишь пункт а), исходы 2), 3) и 6) остаются без изменения.

§ 6. Алгоритм решения задачи ВЫП

Ниже будем говорить: таблица выполнима (когда записанная в ней КНФ имеет выполняющие наборы) или таблица противоречива (если противоречива КНФ, представленная в таблице, то есть КНФ не имеет выполняющих наборов).

Способ, устанавливающий выполнимость таблицы или её противоречивость, а в случае выполнимости, позволяющий построить выполняющий набор (хотя бы один), будем называть алгоритмом решения задачи **ВЫП** или короче: алгоритмом **ВЫП**.

Сформулируем основные пункты алгоритма **ВЫП**, затем поясним их и проиллюстрируем примерами.

I. Векторы в таблице **ВЫП** должны быть отсортированы в соответствии с первым требованием упрощённого анализа.

II. Выполняется i -ый вариант анализа (начиная с $i = 1$), в результате которого условно исключаются (записью указателей) столбцы (справа налево) и некоторые из неисключённых строк, отвечающие выбранным указателям столбца.

III. Если i -ый вариант анализа привел к исходу 1, то строим дополнительные векторы (векторы получают номера со штрихом и записываются под чертой основной таблицы, составляя её дополнение) и переходим к $(i + 1)$ -ому варианту, если это только возможно, иначе анализ закончен.

IV. Если i -ый вариант анализа привёл к исходу 2 или 3, то таблица выполнима и выполняющая конъюнкция (или набор) строится по III служебной строке i -го варианта.

Теперь некоторые пояснения.

Требование, чтобы векторы в исходной таблице следовали в порядке неубывания их длины, продиктованы стремлением легко и быстро находить соответствующие исходы, определённые стратегией анализа и условного исключения. Стратегия же принята такая (она могла быть и другой) и состоит из следующих двух требований.

1) Приоритет на прочтение при анализе имеют векторы дополнения, причём снизу вверх, а если такое чтение к определению исхода не привело, то идёт дальнейшее чтение сверху вниз исходной таблицы. Из сказанного следует, что по исходной таблице будут определяться номера исходов пока дополнения у таблицы нет, или оно есть, но его векторы условно исключены.

2) В вариантах анализа для случая исхода **6б** налагаем такое требование: указатель должен быть таким, чтобы он не приводил (для дополнения таблицы) и приводил (для исходной таблицы) к условному исключению первого из условно неисключённых векторов.

Для того, чтобы можно было строить дополнительные векторы, когда i -ый вариант анализа привёл к исходу 1, следует иметь некоторое количество векторов, помеченных в служебном столбце указателями со звездочкой. При каждом выходе в ведущем столбце k на исход 4 или 5 первый из прочитанных векторов с началом $\bar{\tau}$ или τ следует пометить указателем k^* . Кроме того, первая (в порядке чтения) пара согласованных векторов, приведшая к исходу 1, должна получить указатели со звёздочкой (заметим, что векторы такой пары могут быть и из разных частей таблицы).

Построим последовательность пар, каждая из которых в резолюции даст нам дополнительный вектор, который может составить согласованную пару с вектором, имеющим

указатель со звёздочкой и так далее. Над этими дополнительными резолюционными векторами должна быть осуществлена прополка (вектор A “пропальвает” вектор B , если конъюнкция векторов A и B даёт вектор A), если таковая возможна.

Оставшиеся после прополки резолюционные векторы получают номера со штрихами и размещаются в дополнение таблицы по убыванию их длины (без перестановки тех векторов, которые уже записаны в дополнение таблицы).

Назовём таблицу с дополнением надтаблицей.

Под эквивалентностью таблицы задачи **ВЫП** будем понимать такие таблицы, которые имеют одни и те же выполняющие наборы.

Лемма 3. Исходная таблица и надтаблица — эквивалентны.

Эта лемма верна, так как она есть простое следствие леммы 2.

Иллюстрацией к уже рассмотренным пунктам I – III алгоритма может служить таблица 1 с выкладками в таблице 2 (где столбцы v, n, z указывают соответственно на вариант, номер вектора и знак против вектора резолюции, указывающий (+) на перенос его в дополнение таблицы и (-), если он прополот). Сделаем некоторые пояснения.

Исходная таблица — это векторы с номерами 1 – 18, а векторы $1' – 12'$ суть дополнения. Строго говоря, необходимости в нумерации нет, но она выполнена для удобства пояснений.

Варианты анализа: 1 – 10. Заметим, что фактически необходимы служебная строка **III** и служебный столбец в одном экземпляре, но для этого необходимо стирать и записывать, что и должно выполняться в памяти компьютера, но на бумаге — это проблематично.

В первом варианте указатели в **III** служебной строке (в соответствии с требованиями пунктов 1 и 2 сформулированной выше стратегии) продиктованы строками 1, 3, 4, 10, 6, 16 и 17. Указатели строк 6, 16 и 17 получили *, что привело к выкладкам (см. табл.2), результат которых — резолюционные векторы $1'$ и $2'$, перенесённые в дополнение таблицы. Вектор $2'$ указывает на то, что во втором варианте продолжение анализа должно начаться со 2-го столбца (до 2-го столбца анализ второго варианта совпадает с первым). Таким образом, строки $2', 6, 10$ и 11 продиктовали указатели второго варианта (все эти строки помечены указателями со *). Результат выкладок: резолюционные векторы $3'$ и $4'$.

Дальнейшее должно быть понятно из представленных выкладок. Обратим лишь внимание на то, что на прополку должен проверяться каждый из векторов дополнения, участвующих в выкладках варианта (см. варианты 3, 6 и 8). И, наконец, векторы, получившие в десятом варианте указатели со *, то есть с номерами 17, 13, $12', 3', 1, 11', 9'$ в результате резолюций дают вектор $\langle \theta \rangle$, означающий: таблица противоречива.

Теперь сосредоточимся на пункте IV алгоритма.

По **III** служебной строке, начинающейся с исходов 2) или 3) и заполненной символами из множества $\{4, 5, T, T^*, M\}$, строится вектор, сопоставляя перечисленным символам начальные продукции τ и $\bar{\tau}$ и продукции T^*, T и M так:

$$\begin{bmatrix} 2, & 3, & 4, & 5, & T, & T^*, & M \\ \tau, & \bar{\tau}, & T^*, & T, & T^*, & T, & M \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Таблица 2

В	И	0	1	2	3	4	5	з
1	17	$\bar{\tau}$	T	T				
	16	τ	T		T^*		T^*	
	1'		$\bar{\tau}$	T	T^*		T^*	+
	6		τ		T^*	T		
	2'			$\bar{\tau}$	T^*	T	T^*	+
2	11	$\bar{\tau}$		T^*		T		
	10	τ		T^*		T		
	3'			τ		T		+
	2'			$\bar{\tau}$	T^*	T	T^*	
	4'				τ	T	T^*	+
3	5		$\bar{\tau}$		T		T^*	
	4		τ		T		T	
	5'				$\bar{\tau}$		T^*	+
	4'				τ	T	T^*	-
	6'					$\bar{\tau}$	T^*	+
4	12	τ		T		T^*		
	9	$\bar{\tau}$			T^*	T^*		
	7'			$\bar{\tau}$	T^*	T^*		+
5	16	τ	T		T^*		T^*	
	9	$\bar{\tau}$			T^*	T^*		
	8'		$\bar{\tau}$		T^*	T^*	T^*	+
6	14	τ	T^*			T^*		
	9	$\bar{\tau}$			T^*	T^*		
			τ		T^*	T^*		
	8'		$\bar{\tau}$		T^*	T^*	T^*	-
					τ	T^*	T^*	-
	5'				$\bar{\tau}$		T^*	-
7	7'			$\bar{\tau}$	T^*	T^*		
	2			τ		T^*	T	
	10'				τ	T^*	T	+
8	3			$\bar{\tau}$	T	T^*		
	2			τ		T^*	T	
					$\bar{\tau}$	T^*	T	-
	10'				τ	T^*	T	-
	11'					τ	T	+
9	18	$\bar{\tau}$	T^*	T	T			
	13	τ		T	T			
	12'		τ	T	T			+

Построенный таким образом вектор является вектором искомой дизъюнкции. Вектор конъюнкции, выполнимый на таблице **ВЫП**, можно получить из искомого вектора дизъюнкции в результате инвертирования последнего, то есть в результате инвертирова-

ния всех продукций вектора искомой дизъюнкции, кроме продукции M (см. теорему 1). Этот вектор конъюнкции и даёт выполняющие наборы.

Разумеется, что выполняющие наборы можно строить и непосредственно по **III** служебной строке так: подобно (20) сопоставим продукциям 2, 4 и T символ $\bar{\theta}$, а продукциям 3, 5 и T^* — символ θ . Разряды в **III** служебной строке левее исходов 2) и 3) и занятые продукцией M (пусть имеется t таких разрядов) являются независимыми и поэтому им могут сопоставляться как θ , так и $\bar{\theta}$ (это даёт не один, а 2^t выполняющих наборов).

Сказанное в двух последних абзацах является прямым следствием определений (1) и (2), которыми и обусловлены сами исходы, определённые в 5.

Можно понять, что верно даже большее.

Лемма 4. Те наборы, на которых выполнены векторы конъюнкции, являются наборами, только на которых не выполнены искомые векторы дизъюнкции.

Лемма 5. Если вектором искомой дизъюнкции пополнить таблицу и продолжить поиск выполняющих наборов, то либо найдём новые выполняющие наборы (если они есть), либо получим противоречивую таблицу.

Для иллюстрации к сказанному в пункте IV алгоритма рассмотрим таблицу 3 с выкладками в таблице 4.

Первый вариант анализа в таблице 3 пояснений не требует, поскольку он заканчивается исходом 1 и аналогичен уже рассмотренным выше, в таблице 1. Второй вариант анализа заканчивается исходом 3, поэтому делаем заключение: таблица выполнима.

Искомый вектор дизъюнкции, построенный по **III** служебной строке второго варианта, таков: $\langle \bar{\tau} T T^* T^* T^* T^* \rangle$ и выполняющим вектором конъюнкции является $\langle \tau \bar{T} \bar{T}^* \bar{T}^* \bar{T}^* \bar{T}^* \rangle$. Выполняющий набор: $\langle \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} \bar{\theta} \bar{\theta} \rangle$. К таблицам 3 и 4 вернёмся ниже.

§ 7. Суперприведение задачи ВВП

Будем называть таблицу задачи **ВВП** суперприведённой в системе продукций Q , если таблица преобразована в системе Q так, что в ней не найдётся ни одна пара векторов, которая в результате анализа давала бы исход 1.

Из этого определения следует, что если задача **ВВП** противоречива, то результатом суперприведения всегда будет вырожденная таблица, состоящая из одного вектора $\langle \theta \rangle$. Если же таблица не противоречива, то результатом её суперприведения будет таблица, из которой выполняющий вектор будет извлекаться за линейное время от размера таблицы.

Пример суперприведённой таблицы — это таблица 3 (исходная из векторов 1 – 24) с дополнением $1' – 9'$ (без пропалотых векторов $4'$ и $5'$).

Замечание 1. Таблица 5, содержащая лишь некоторые из векторов таблицы 3, является тоже суперприведённой таблицей, эквивалентной исходной таблице 3.

Теперь остановимся на том, как получена суперприведённая таблица 3, а затем и таблица 5.

На варианте 2 остановились в §6, так как в этом варианте пришли к выводу о том, что таблица 3 выполнима. Но если бы потребовалось узнать, имеются ли ещё выполняющие конъюнкции, можно было бы применить лемму 5. Применение леммы 5 привело бы к выкладке, в которой, кроме искомого вектора дизъюнкции, потребовались бы векторы 15, 7, 3 и $1'$, а результатом бы явился резолюционный вектор $\langle \tau_4 T^* \rangle$, означающий, что анализ в третьем варианте следует продолжить со столбца 4.

Внимательное наблюдение позволило бы нам заметить, что и без указанной выкладки можно обойтись: следует просто вернуться в первой слева направо столбец ветвления (столбцом “ветвления” назван столбец, в котором имеет место выбор указателя по исходу **6б**) в соответствии с наложенным выше требованием) и там заменить указатель T (или T^*) на указатель 5 (или 4) и продолжить анализ.

Те строки, которые определили выход на исход 2 или 3, должны быть зафиксированы. Фиксация строк, получивших указатели со звёздочкой в вариантах 2 или 3, осуществлена в дополнительном служебном столбце S (звёздочками, указанными в нём).

В нашем случае варианты 2, 4 и 7 привели к звёздочке в столбце S для всех векторов, кроме вектора $9'$. Тем не менее, против него указана звёздочка и вот почему. Если бы вектор $9'$ был уже в таблице к началу варианта 7, то в столбце 2 варианта 7 имели бы исход 5, продиктованный именно вектором $9'$, который и был бы отмечен указателем со звёздочкой.

Совершенно ясно, что указанное явление имеет общий характер и должно быть уточнено так.

Замечание 2. Если результирующий резолюционный вектор имеет начало в столбце с числовым указателем, то такой вектор должен быть помечен звёздочкой в столбце S .

Все и только те векторы, которые помечены в столбце S звёздочкой, составляют суперприведённую таблицу, эквивалентную исходной.

Вектор называется лишним в таблице, если его можно из таблицы исключить без нарушения эквивалентности.

Векторы, не получившие в результате суперприведения по указанному алгоритму звёздочки, являются лишними. Результат удаления лишних векторов из таблицы 3 — это таблица 5.

Кроме суперприведённой таблицы 5 имеются и другие суперприведённые таблицы, которые эквивалентны таблице 3. Таковыми являются, например, таблицы 6 и 7. Таблица 6 отличается от таблицы 5 тем, что у неё некоторые векторы имеют меньший ранг, а в таблице 7 (по сравнению с таблицей 6) идёт дальнейшее уменьшение не только рангов некоторых векторов, но уменьшается и число векторов.

Рассмотрим те регулярные преобразования, которые приводят от таблицы 5 к таблице 6, а затем и к таблице 7.

В таблицах 8 – 10 представлены векторы из 1–го, 2–го и 3–го вариантов, получивших в результате анализа указатели со звёздочкой. Векторы каждой из таких таблиц всегда согласованы, а поэтому над ними можно выполнять конъюнкционную резолюцию. В таблицах резолюции 1° , 2° и 3° занимают результирующие строки.

Выполняя конъюнкционные резолюции, можно заметить, что если в некотором столбце имеется $\bar{\tau}$ (или τ), то соответствующие продукции T^* (или T) этого столбца могут быть заменены на M , что не приведёт к изменению результирующих векторов 1° , 2° и 3° . Это и проиллюстрировано в таблицах 11 – 13 (которые соответствуют таблицам 8 – 10). Сведение векторов из таблиц 11 – 13 в одну таблицу и даёт таблицу 6.

Далее замечаем, что в таблице 6 вектор 2 пропалывается вектором 3, векторы 14 и 15 в резолюции дают вектор $\langle \tau M M M M \rangle$, который пропалывает вектор 11. Так из таблицы 6 получается таблица 7.

Замечание 3. Все записи и выкладки над векторами в таблицах 3 и 4, а также все векторы в таблицах 5 – 7 записаны в системе продукции Q_3 . Расширение системы Q_3 до Q_2 позволяет каждую из таблиц 8 – 10 (или 11 – 13) заменить одним вектором, а сведение результирующих векторов в одну таблицу даёт таблицу 14 или даже таблицу

Таблица 4

в	н	0	1	2	3	4	5	з
1	6		$\bar{\tau}$		T	T^*		
	5		τ		T	T^*		
	1'				$\bar{\tau}$	T^*		+
3	9		$\bar{\tau}$	T^*	T			
	7		τ	T^*			T^*	
	2'			τ	T		T^*	+
	2			$\bar{\tau}$		T	T^*	
	3'				$\bar{\tau}$	T	T^*	+
5	19	$\bar{\tau}$	T				T	
	13	τ		T^*			T	
	4'		$\bar{\tau}$	T^*			T	+
	4		τ		T^*		T	
	5'			τ	T^*		T	+
6	19	$\bar{\tau}$	T				T	
	14	τ		T			T	
	6'		$\bar{\tau}$	T			T	+
	4'		τ		T^*		T	-
				$\bar{\tau}$	T^*		T	-
	5'			τ	T^*		T	-
	7'				τ		T	+
	1'				τ	T^*		
8'					τ	T	+	
8	17	$\bar{\tau}$		T^*	T			
	13	τ		T^*			T	
	9'			τ	T		T	+

Таблица 5

	3	4	5	5	5	5	3		
	3	5	4	4	4	T	2		
	3	5	4	4	T^*	T	1		
$\bar{\tau}$	0	1	2	3	4	5			
8'					τ	T	5	5	4*
7'				τ		T	5	5	3*
1'				$\bar{\tau}$	T^*		4	3*	4
3'				$\bar{\tau}$	T	T^*	3*	4	5
2			$\bar{\tau}$		T	T^*	2*	4	5
3			$\bar{\tau}$	T^*		T^*	2	2*	5
9'			τ	T		T	3	3	2*
7		τ	T^*			T^*	1*	1*	5
6'		$\bar{\tau}$	T			T	5	5	1*
11	τ				T	T^*	0*	4	5
14	τ		T			T	5	5	0*
15	τ		T^*			T^*	0	0*	5

Таблица 6

	3	4	5	5	5	5	3		
	3	5	4	4	4	T	2		
	3	5	4	4	T^*	T	1		
$\bar{\tau}$	0	1	2	3	4	5			
8'				τ	T	5	5	4*	
7'			τ		T	5	5	3*	
1'			$\bar{\tau}$	T^*		4	3*	4	
3'			$\bar{\tau}$	T	T^*	3*	4	5	
2			$\bar{\tau}$	T	T^*	2*	4	5	
3			$\bar{\tau}$		T^*	2	2*	5	
9'			τ		T	5	5	2*	
7		τ			T^*	1*	1*	5	
6'		$\bar{\tau}$			T	5	5	1*	
11	τ			T	T^*	0*	4	5	
14	τ				T	5	5	0*	
15	τ				T^*	0	0*	5	

Таблица 7

	3	4	5	5	5	5	3		
	3	5	4	4	4	T	2		
	3	5	4	4	T^*	T	1		
$\bar{\tau}$	0	1	2	3	4	5			
8'					τ	T	5	5	4*
7'				τ		T	5	5	3*
1'				$\bar{\tau}$	T^*		4	3*	4
3'				$\bar{\tau}$	T	T^*	3*	4	5
2			$\bar{\tau}$		T^*	T^*	2*	2*	5
9'			τ		T	T	5	5	2*
7		τ			T^*	T^*	1*	1*	5
6'		$\bar{\tau}$			T	T	5	5	1*
14'	τ					T	0*	0*	0*

Таблица 8

$\bar{7}$	0	1	2	3	4	5
3'				$\bar{\tau}$	T	T^*
2			$\bar{\tau}$		T	T^*
7		τ	T^*			T^*
11	τ				T	T^*
1°	τ	\bar{T}	\bar{T}^*	\bar{T}^*	T	T^*

Таблица 9

$\bar{7}$	0	1	2	3	4	5
1'				$\bar{\tau}$	T^*	
3			$\bar{\tau}$	T^*		T^*
7		τ	T^*			T^*
15	τ		T^*			T^*
2°	τ	\bar{T}	\bar{T}^*	\bar{T}^*	T^*	T^*

Таблица 10

$\bar{7}$	0	1	2	3	4	5
8'					τ	T
7'				τ		T
9'			τ	T		T
6'		$\bar{\tau}$	T			T
14'	τ		T			T
3°	τ	\bar{T}^*	\bar{T}	\bar{T}	\bar{T}	T

Таблица 11

$\bar{7}$	0	1	2	3	4	5
3'				$\bar{\tau}$	T	T^*
2			$\bar{\tau}$		T	T^*
7		τ				T^*
11	τ				T	T^*
1°	τ	\bar{T}	\bar{T}^*	\bar{T}^*	T	T^*

Таблица 12

$\bar{7}$	0	1	2	3	4	5
1'				$\bar{\tau}$	T^*	
3			$\bar{\tau}$			T^*
7		τ				T^*
15	τ					T^*
2°	τ	\bar{T}	\bar{T}^*	\bar{T}^*	T^*	T^*

Таблица 13

$\bar{7}$	0	1	2	3	4	5
8'					τ	T
7'				τ		T
9'			τ			T
6'		$\bar{\tau}$				T
14'	τ					T
3°	τ	\bar{T}^*	\bar{T}	\bar{T}	\bar{T}	T

Таблица 14

	3	5	4	4	5	4			3
	3	5	4	4	T	4		2	
	3	4	5	5	5	T^*	1		
$\bar{7}$	0	1	2	3	4	5			
1°	τ	\bar{T}	\bar{T}^*	\bar{T}^*	T	T^*	5	4	0*
2°	τ	\bar{T}	\bar{T}^*	\bar{T}^*	T^*	T^*	5	0*	4
3°	τ	\bar{T}^*	\bar{T}	\bar{T}	\bar{T}	T	0*	5	5

Таблица 15

	3	4	5	5	5	5			2
	3	5	4	4	M	T		1	
$\bar{7}$	0	1	2	3	4	5			
3°	τ	\bar{T}^*	\bar{T}	\bar{T}	\bar{T}	T	5	0*	
4°	τ	\bar{T}	\bar{T}^*	\bar{T}^*		T^*	0*	5	

Замечание 4. Развёртка векторов 3° и 4° из таблицы 15, записанных в системе Q_2 , в векторы системы Q_3 , приводит нас к таблице 16, которая проще каждой из таблиц 5 – 7, хотя и эквивалента им.

Замечание 5. Если требуется заданную таблично **КНФ** превратить в табличную **ДНФ** (дизъюнктивную нормальную форму), то, как уже отмечалось выше, следует при каждом выходе на исход 2 или 3 по **III** служебной строке строить вектор искомого дизъюнкта. Инвертирование таких векторов и сведение их в таблицу (где на пересечении первого столбца и **I** служебной строки записан знак $\langle \bar{\downarrow} \rangle$, указывающий на дизъюнктивное соединение векторов таблицы) решает поставленную задачу.

Результат применения замечания 5 к таблице 3 (или к эквивалентной ей таблице) — это таблица 17 или 18.

Таблица 16

	3	4	5	5	5	5	2	
	3	5	4	4	M	T	1	
$\bar{7}$	0	1	2	3	4	5		
1					τ	T	5	4*
2				τ		T	5	3*
3			τ			T	5	2*
4		$\bar{\tau}$				T	5	1*
5	τ						0*	0*
6				$\bar{\tau}$		T^*	3*	5
7			$\bar{\tau}$			T^*	2*	5
8		τ				T^*	1*	5

Таблица 17

$\bar{\downarrow}$	0	1	2	3	4	5
1	τ	\bar{T}	\bar{T}^*	\bar{T}^*	\bar{T}^*	\bar{T}^*
2	τ	\bar{T}	\bar{T}^*	\bar{T}^*	\bar{T}	\bar{T}^*
3	τ	\bar{T}^*	\bar{T}	\bar{T}	\bar{T}	\bar{T}

Таблица 18

$\bar{\downarrow}$	0	1	2	3	4	5
3	τ	\bar{T}^*	\bar{T}	\bar{T}	\bar{T}	\bar{T}
4	τ	\bar{T}	\bar{T}^*	\bar{T}^*	M	\bar{T}^*

Суперприведение преобразованием таблиц.

Если все выполняющие (и невыполняющие) наборы одной таблицы **КНФ** являются соответственно невыполняющими (и выполняющими) наборами другой таблицы **КНФ**, то такие таблицы **ВЫП** называются взаимными.

Сформулируем следующие прямую и обратную задачи.

Если для исходной таблицы **КНФ** построить взаимную ей таблицу **КНФ**, а для последней двойственную таблицу (см. определение в конце §3), то она будет таблицей **ДНФ** для исходной таблицы **КНФ** (см. лемму 4 из §6).

Если необходимо решить обратную задачу, то есть задана таблично некоторая **ДНФ** и для неё требуется построить табличную **КНФ**, то следует поступать так. Для таблицы **ДНФ** строим двойственную таблицу **КНФ**. Для последней находим взаимную. Она будет таблицей **КНФ** для заданной **ДНФ**.

Теперь задачу суперприведения таблицы **КНФ** можно рассматривать как дважды решённую задачу на построение взаимной таблицы **КНФ**, то есть решение сформулированных выше прямой и обратной задач без перехода к **ДНФ** и обратной от неё. Сам этот процесс может рассматриваться как придание задачи **ВЫП** некоторой структуры.

Однако следует заметить, что во всех этих формулировках (прямая задача, обратная задача, задача суперприведения) основной (по трудоёмкости) задачей является: построение для заданной таблицы **КНФ** взаимной таблицы **КНФ**.

Алгоритм решения такой задачи был по сути рассмотрен выше. Надо сказать, что в теоретическом плане этот базовый алгоритм является достаточным (подробнее об этом в следующем параграфе), но в практическом его применении могут быть использованы некоторые модификации, на которых остановимся ниже и даже их проиллюстрируем на таблицах 19 – 22.

1. Перестановка столбцов. В §5 было наложено требование на следование строк в таблице. От этого требования в теоретическом плане можно отказаться, однако на практике лучше его придерживаться. Пока ничего не упоминалось о перестановке столбцов, поскольку теоретически это никак не используется в базовом алгоритме, но в практическом применении алгоритма можно сказать, что лучше, чтобы столбцы в таблице следовали слева направо по убыванию их ранга, а ещё лучше — по убыванию числа $E = E_T \cdot E_{T^*}$, где E_T и E_{T^*} — это соответственно число продукций T (включая и $\bar{\tau}$) и число продукций T^* (включая τ) в рассматриваемом столбце.

Таблица 19

		1	5	4	4	5						6	
	3	5	4	5	T^*	5						5	
		1	T	T^*	5						4		
		1	4	4	5	T						3	
		2	T^*	4	5	T						2	
		1	T^*	T	T	T	1						
$\bar{/}$	0	1	2	3	4	5							
1				$\bar{\tau}$	T^*	T	5	5	5	4	4	3^*	
2				$\bar{\tau}$	T	T^*	4	3^*	3	5	5	5	
3			$\bar{\tau}$		T	T	5	5	5	2^*	2	4	
4			τ	T^*		T	5	5	5	2^*	3	2^*	
5			$\bar{\tau}$	T		T^*	3	3	3	5	5	5	
6			τ	T	T^*		3	4	4	4	4	3	
7			$\bar{\tau}$	T	T	T	5	5	5	3	2	4	
8		$\bar{\tau}$			T^*	T^*	1^*	4	4	5	5	5	
9		$\bar{\tau}$			T^*	T	5	5	5	4	4	1^*	
10		τ			T^*	T^*	1^*	4	4	5	5	5	
11		τ		T^*		T	5	5	5		3	1^*	
12		τ		T	T		4	3	3	3	1^*	4	
13		τ	T^*			T^*	2	2	1^*	5	5	5	
14		$\bar{\tau}$	T		T		4	1^*	2		2	4	
15		$\bar{\tau}$	T^*	T^*			2	2	1^*		3	2	
16	τ			T	T	T	5	5	5	3	0^*	4	
17	$\bar{\tau}$		T		T^*		4	4	4	4	4		
18	τ		T^*		T^*	T^*	2	4	4	5	5	5	
19	τ		T^*	T			3	3	3	3	0	3	
20	τ		T	T			3	3	3	3	2	3	
21	τ		T^*	T^*		T^*	2	2		5	5	5	
22	$\bar{\tau}$	T^*			T		5	5	5		1		
23	$\bar{\tau}$	T^*			T^*		4	4	4	4	4		
24	$\bar{\tau}$	T		T^*			1				3		
1'				τ	T^*		4*		—	—	—	—	
2'			$\bar{\tau}$	\bar{T}^*	\bar{T}		2*		—	—	—	—	
3'		$\bar{\tau}$	T^*	T^*		\bar{T}	5*					—	
4'			$\bar{\tau}$	\bar{T}	T	\bar{T}	2*					—	
5'				$\bar{\tau}$	\bar{T}		4*						

Таблица 20

в	н	0	1	2	3	4	5	з
1	10		τ			T^*	T^*	—
	8		$\bar{\tau}$			T^*	T^*	—
	1'					τ	T^*	+
2	1+		τ	T	T^*	T	T^*	—
	14		$\bar{\tau}$	T		T		—
3				$\bar{\tau}$	T^*	T	T^*	+
	2				$\bar{\tau}$	T	T^*	+
	1'				τ	T^*	T^*	+
	2'			$\bar{\tau}$	\bar{T}^*	\bar{T}	T^*	
	15		$\bar{\tau}$	T^*	T^*			+
4	13		τ	T^*			T^*	—
	2*			τ	T^*	\bar{T}^*	\bar{T}	—
	3'		$\bar{\tau}$	T^*	T^*		T	+
	4			τ	T^*		T	—
	3			$\bar{\tau}$		T	T	+
5	3'				τ	T	T	+
	4'			$\bar{\tau}$	\bar{T}	T	\bar{T}	
	2+	$\bar{\tau}$	T	T^*	T	T	T	—
	16	τ			T	T	T	—
	12		$\bar{\tau}$	T^*	T	T	T	—
6	4'			τ	T	T	T	—
	5'			$\bar{\tau}$	\bar{T}	T	\bar{T}	—
	11		τ		T^*		T	+
	9		$\bar{\tau}$			T^*	T	
	1				τ	T^*	T	
5'				$\bar{\tau}$	T^*	T		
6'					τ	\bar{T}	θ	

Таблица 19 получена из таблицы 3 в результате перестановки

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

столбцов, так как в таблице 3 число E имеет такие значения:

I	0	1	2	3	4	5
E_T	6	6	8	9	4	5
E_{T^*}	8	7	7	5	5	6
E	48	42	56	45	20	30

2. Применение леммы 5. Использование леммы 5 даёт возможность отказаться от дополнительного столбца S , но всегда предполагает, что кроме исходной таблицы строится и взаимная таблица: каждый выход на исход 2 или 3 ведёт к построению искомого дизъюнкта, который заносится во взаимную таблицу (при этом лучше проверить, нельзя ли над ним и каким-нибудь из уже имеющихся в таблице векторов выполнить конъюнкцию и тем самым изменить один из имеющихся векторов).

Выход на исходы 2 и 3 в вариантах 2 и 5 в таблице 19 привёл к векторам 1^+ и 2^+ , которые и составили таблицу 21, взаимную таблице 19, а анализ над таблицей 21 привёл к таблице 22, которая взаимна таблице 21. Значит, таблица 22 является суперприведённой для таблицы 19.

Таблица 21

		3	2	3	2	4		2
	2	2	3	2	2	T^*	1	
$\bar{7}$	0	1	2	3	4	5		
1^+		τ	T	T^*	T	T^*	5	1^*
2^+	$\bar{\tau}$	T	T^*	T	T	T	0^*	5

Таблица 22

		3	5	4	5	5	5		2
		2	5	4	5	T	1		
$\bar{7}$	0	1	2	3	4	5			
1^+	$\bar{\tau}$	\bar{T}	\bar{T}^*	\bar{T}	\bar{T}	T	5	0^*	
2^+		$\bar{\tau}$	\bar{T}	\bar{T}^*	\bar{T}	T^*	1^*	5	

Замечание 6. В таблице 22 выполнен анализ с одной лишь целью: показать, что по указателям III служебной строки вариантов 1 и 2 строятся такие же искомые векторы дизъюнкции, что и по таблице 19 в вариантах 2 и 5.

Замечание 7. Анализ и расстановка указателей в таблице 21 может вызвать некоторые вопросы, поскольку согласно только что сформулированному пункту 2 к базовому алгоритму, следовало бы с каждым выходом на исход 2 или 3 составлять дополнительный вектор, вносить его в дополнение таблицы, после чего следовало бы продолжить анализ. Но такой ход работы, если его действительно выполнить, показывает, что так следует поступать для исходов 2 или 3, имеющих подпункт а. В случае подпункта б, такие исходы 2 и 3 следует считать внутренними, для них не выполнять исключение строк и продолжать анализ. Кроме того, при построении векторов искомых дизъюнкций ставить в соответствие таким внутренним исходам 2 и 3 продукции \bar{T} и \bar{T}^* .

3. Дополнение таблицы из одного вектора. Число векторов дополнения по базовому алгоритму может быть достаточно большим. Однако можно обходиться всего лишь одним дополнительным вектором, который должен при каждом варианте анализа изменяться и вырождаться в конце концов в вектор $\langle \theta \rangle$. Такой дополнительный вектор — это результат конъюнкционной резолюции над векторами, получившими в i -ом варианте анализа указатели со *, предыдущим дополнительным вектором и вектором, построенным по III служебной строке в случае выхода на исход 2а или 3а.

Анализ и выкладки с одним дополнительным вектором представлены в таблицах 19 и 20, которые вряд ли требуют какие-либо пояснения.

4. Сегментация таблицы. Назовём сегментацией таблицы деление её на подтаблицы. Смысл сегментации заключается в том, что суперприведение можно выполнять на каждом из сегментов, а затем выполнить окончательное суперприведение на всех вместе взятых суперприведённых сегментах. Проблема лишь в том, как правильно выполнить сегментацию. Однако, если даже ответ на этот вопрос не получен, всё равно имеются возможности использования сегментации на уровне формирования общей задачи из класса NP -полных (об этом подробнее ниже, в заключении).

Здесь лишь отметим, что при каждом варианте анализа происходит выделение согласованного сегмента (сегмент называется согласованным, если вектора этого сегмента попарно согласованы), суперприведение которого выполняется в результате пополнения дополнения таблицы резолюционными векторами, полученными по векторам согласованного сегмента.

§ 8. Итоговый алгоритм и его эффективность

Назовём итоговым сформулированный выше базовый алгоритм с модификациями, о которых идёт речь в конце предыдущего параграфа.

В этом определении имеется достаточно свободы в том плане, что модификации к базовому алгоритму могут быть выполнены в различных конфигурациях, а поэтому (для определённости) выделим одну (из различных возможных) конфигурацию и только её будем иметь в виду, говоря об итоговом алгоритме.

Итак, итоговый алгоритм предназначен для построения по заданной таблице **КНФ** взаимной таблицы **КНФ** (которая, в случае противоречивости исходной вырождается в вектор $\langle \theta \rangle$).

Иллюстрировать будем модификации на таблице 23 с выкладками в таблице 24. Анализ и выкладки приводятся в том объёме, который достаточен для того, чтобы отразить всё существенное.

Теперь сформулируем требования, которыми дополняется базовый алгоритм, чтобы он превратился в итоговый.

1. Столбцы в исходной таблице должны следовать слева направо по неубыванию числа E (определение дано в п.1 §7).

В таблице 23 (исходная состоит из строк 1 – 40) переставлять столбцы не требуется, поскольку значения для E таковы: 4, 20, 54, 56, 60, 64, 65, 80, 96, 99.

2. Выход на исход 2 или 3 требует применение леммы 5 в полном соответствии с описанием п.2 §7.

В таблице 23 выход на исход 2 произошёл в варианте 4. Он приводит к искомому дизъюнкту 1^+ : $\langle \tau TTT^*T^*TT^*TTT \rangle$.

3. Выделение минимального согласованного сегмента в результате очередного варианта анализа таблицы.

4. Результаты резолюций над векторами минимального согласованного сегмента заносятся в дополнение таблицы. При этом проверяем: не пропалываются ли одни векторы другими (если да, то пропалываем) и нельзя ли выполнить конъюнкцию над какими-нибудь из оставшихся после прополки векторов (если да, то выполняем конъюнкцию).

Теперь поясним пункты 3 и 4. В результате анализа (каждого варианта), согласно базовому алгоритму, ряд векторов получают указатели со *. Из этих векторов и формируется согласованный сегмент, хотя не всегда все векторы, отмеченные *, входят в него. Какие векторы, из отмеченных *, войдут в минимальный согласованный сегмент, выясняется на этапе вычисления резолюций: те из них, которые потребуются для образования резолюций, только они и войдут. И вот почему.

Лемма 6. Если в ходе анализа таблицы имеется выход на исход 1 в столбце с номером t , то это значит: в таблице имеются два согласованных вектора $\langle a_t \rangle$ и $\langle b_t \rangle$, резолюция над которыми даёт вектор $\langle c_r \rangle$, где $r > t$, запись которого в дополнение таблицы приведёт к тому, что пара из векторов $\langle a_t \rangle$ и $\langle b_t \rangle$ больше давать исход 1 в ходе анализа не сможет.

Доказательство. Если анализ таблицы приводит к исходу 1, который обеспечивается парой согласованных векторов $\langle a_t \rangle$ и $\langle b_t \rangle$, то это значит: один из них имеет начало $\langle \bar{\tau}_t \rangle$, а другой — $\langle \tau_t \rangle$, вектор $\langle c_r \rangle$ — результат резолюции над указанной парой имеет начало в столбце r . Значит, если вектор $\langle c_r \rangle$ будет включён в дополнение таблицы, то в столбце r , начало вектора $\langle c_r \rangle$, и определится исход, который приведёт к условному исключению хотя бы одного из векторов $\langle a_t \rangle$ или $\langle b_t \rangle$ (не исключено, что могут быть условно исключены и оба вектора). Лемма доказана.

Если для резолюционного вектора $\langle c_r \rangle$ найдётся согласованный с ним вектор (разумеется, надо рассматривать только векторы, помеченные *), который в столбце r даёт исход 1, то вновь можно применить лемму 6 и так далее до тех пор, пока такая возможность закончится.

По таблицам 23 и 24 видим, что все векторы, получившие указатели со * в первом варианте анализа (то есть векторы: 40, 37, 34, 18, 15, 10), составили первый минимальный согласованный сегмент. В вариантах 2 и 3 — это уже не так. Вектор 14 (во втором варианте), векторы 36, 18 и 12 (в третьем варианте) не вошли соответственно во второй и третий минимальные согласованные сегменты.

Замечание 8. В тех случаях, когда решается задача распознавания выполнимости заданной **КНФ**, выходом на исход 2 или 3 заканчивается решение задачи, поскольку такие исходы означают, что имеется выполнимость. В тех же случаях, когда строится для заданной таблицы **КНФ** взаимная к ней таблица **КНФ**, следует смотреть на вектор искомой дизъюнкции как на вектор, входящий в исходную таблицу (и считать его таковым).

Замечание 9. Первая пара согласованных векторов, входящая в минимальный согласованный сегмент, в тех случаях, когда имеется исход 2 или 3, содержит (в силу замечания 8) вектор искомой дизъюнкции, построенной по **III** служебной строке, и вектор, приведший к исходу 2 или 3.

В варианте 4 анализа таблицы 23 имеем случай, предусмотренный в замечании 9 и по таблице 24 видим, что четвёртый минимальный согласованный сегмент содержит векторы: 1^+ , 38, 36, 18, 12, 6.

Завершим пояснение к таблицам 23 и 24, отметив, что в дополнение таблицы черта в служебном столбце против вектора означает безусловное его исключение, а в таблице 24 черта против резолюционного вектора означает, что он пропалывается другим резолюционным вектором.

Анализ таблицы и выделение минимального согласованного сегмента с последующим его суперприведением является очень важным элементом во всём процессе суперприведения и вот почему.

Теорема 3. Объединение последовательно извлекаемых по итоговому алгоритму минимальных согласованных и суперприведённых сегментов даёт суперприведённую подтаблицу.

Таблица 23

						1	T*	4	T*	T*					5	6
						5	4	T*	T*	T*					4	
	2	5	5	4	4	5	4	T*	T*	T*						
	1	5	5	4	4	T	4	T*	T*	T*				3		
			1	5	4	5	T*	T*	T*	T*			2			
	1	5	5	5	5	T	T*	T*	T*	T*	1					
$\bar{\tau}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9						
1							τ	T	T*	T*	9	9	9	9	9	
2							τ	T	T*	T	8	8	8	8	8	
3							$\bar{\tau}$	T	T*	T*	9	9	9	9	9	
4							$\bar{\tau}$	T	T*	T*	9	9	9	9	9	
5							τ	T	T*	T	7	7	7	7	5*	
6					$\bar{\tau}$			T*	T	T	6	6	4*	4*	6	
7					$\bar{\tau}$			T	T	T*	9	9	9	9	9	
8					$\bar{\tau}$	T		T*	T	T	7	7	7	7		
9					$\bar{\tau}$	T	T	T	T	T	5	4*	6	6		
10					τ	T*	T	T	T	T	4*	5	6	6	7	
11				$\bar{\tau}$				T	T*	T	8	8	8	8	8	
12				$\bar{\tau}$				T*	T	T	6	6	3*	3*	6	
13				$\bar{\tau}$				T*	T	T	8	8	8	8	8	
14				τ				T	T	T	5	3*	6	6		
15				τ	T			T	T	T	3*	4	6	6		
16				τ	T*			T	T*	T	9	9	9	9	9	
17				τ	T*	T*		T	T*	T	9	9	9	9	9	
18			τ					T	T	T	2*	2*	2*	2*		
19		τ						T*	T*	T	8	8	8	8	8	
20		$\bar{\tau}$						T	T	T*	9	9	9	9	9	
21		τ						T*	T	T	6	6	2	2	7	
22		τ						T*	T*	T*	9	9	9	9	9	
23		τ						T*	T*	T	7	7	7	7		
24		$\bar{\tau}$						T*	T	T	4	2*	6	6		
25		$\bar{\tau}$						T*	T*	T	7	7	7	7	6	
26		τ	T*					T*	T*	T	9	9	9	9	9	
27		τ	T					T	T	T	2		6	6	7	
28		$\bar{\tau}$	T*					T*	T*	T	8	8	8	8	8	
29		τ	T*	T*				T	T	T	4	3	6	6		
30		$\bar{\tau}$						T	T	T*	8	8	8	8	8	
31		$\bar{\tau}$						T*	T	T*	9	9	9	9	9	
32		τ						T	T*	T*	9	9	9	9	9	
33		τ						T*	T*	T*	7	7	7	7		
34		τ						T	T	T	1*	4	4	4	7	
35		τ	T*					T	T	T	5		6	6		
36		τ	T					T*	T	T	4		1*	1*		
37	τ							T*	T	T	0*	5	0*	5		
38	$\bar{\tau}$							T*	T	T	4		0*	0*	7	
39	τ	T						T	T	T	5		5	3		
40	$\bar{\tau}$	T	T					T	T	T	0*		3	3		
1'		$\bar{\tau}$	T	T				T*	T	T	5	3	5		-	
2'			$\bar{\tau}$	T	T*			T	T	T	5	-	-	-	-	
3'				τ	T	T		T	T	T	5*	-	-	-	-	
6'				τ	\bar{T}^*	T		T	T	T	6	6	-	-	-	
8'				$\bar{\tau}$	T	\bar{T}^*	T	T	T	T	6*	-	-	-	-	
10'				$\bar{\tau}$	\bar{T}^*	\bar{T}^*	T	T	T	T	6*	-	-	-	-	
11'				τ	T*	T	T	T	T	T	5*	-	-	-	-	
13'				τ	\bar{T}^*	T	\bar{T}^*	T	T	T	5*	-	-	-	-	
15'				$\bar{\tau}$	T*	\bar{T}^*	\bar{T}^*	T	T	T	5*	-	-	-	-	

Таблица 24

В	н	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	з
1	40	$\bar{\tau}$	T	T	T							
	37	τ					T*			T	T	
	1'		$\bar{\tau}$	T	T		T*			T	T	+
	34		τ		T	T				T	T	-
	18			τ		T	T*			T	T	
	2'				$\bar{\tau}$	T	T*			T	T	+
	15				τ	T		T		T	T	
	10					$\bar{\tau}$	T*	T	T	T	T	-
	3'				τ	T*	T	T	T	T	T	+
2	24				$\bar{\tau}$	T*		T		T		
	18				τ					T	T	
	4'					τ		T		T	T	+
	9				$\bar{\tau}$		T	T		T	T	
	5'					$\bar{\tau}$	T	T	T	T	T	+
	3'					τ	T	T	T	T	T	+
	7'					$\bar{\tau}$	T	T	T	T	T	+
	6'		4'	$\bar{\tau}$	5'	=	6'					
			2'	$\bar{\tau}$	7'	=	8'					
	8'			$\bar{\tau}$		T	T*	\bar{T}^*	T	T	T	
3	38	$\bar{\tau}$				T*			T	T		
	37	τ					T*		T	T		
	9'					τ	T*		T	T	T	+
	6					$\bar{\tau}$		T*		T	T	
	11'						τ	T*	T	T	T	+
	10'		8'	$\bar{\tau}$	9'	=	10'					
				$\bar{\tau}$	\bar{T}^*	T*	\bar{T}^*	T	T	T	T	
4	1+	τ				T*	T*	T	T*	T	T	
	38	$\bar{\tau}$				T*	T*		T	T	T	
	36					$\bar{\tau}$	T	T*	T	T	T	-
	18					τ	T*	T*	T	T	T	-
	12					$\bar{\tau}$		T*	T	T	T	-
	6					τ		T	T*	T	T	-
	11'					$\bar{\tau}$		$\bar{\tau}$	T*	T	T	-
	10'					$\bar{\tau}$	\bar{T}^*	T*	\bar{T}^*	T	T	-
	12'									$\bar{\tau}$	T	+
	13'					6'	$\bar{\tau}$	12'	=	13'		
							τ		\bar{T}^*	T	\bar{T}^*	
5	13'					τ	\bar{T}^*	T	T*	\bar{T}^*	T	
	5					τ	T	T*	\bar{T}^*	T	T	
	14'					$\bar{\tau}$	\bar{T}^*	T	\bar{T}^*	T	T	+
	15'					1'	$\bar{\tau}$	14'	=	15'		
							T	T	T*	\bar{T}^*	\bar{T}^*	

Доказательство. Каждый из минимальных согласованных сегментов после присоединения к нему соответствующих дополнительных векторов становится суперприведённым. Теорема верна для случая подтаблицы, состоящей из одного минимального согласованного и суперприведённого сегмента. Присоединение следующего минимального согласованного и суперприведённого сегмента к подтаблице не может позволить извлечь из этой же подтаблицы ещё какого-нибудь минимального сегмента, так как выход на исход 1 не возможен в силу того, что лемма 6 (в соответствии с итоговым алгоритмом) применена столько раз, сколько было возможно, а процесс извлечения следующего минимального согласованного сегмента из таблицы является строго однозначным.

Если взглянуть на таблицу 24, то можно увидеть, что одни и те же векторы из исходной таблицы могут входить в разные минимальные согласованные сегменты, однако верна следующая теорема.

Теорема 4. В результате присоединения последующего минимального согласованного сегмента к суперприведённой подтаблице в ней появится хотя бы один до этого не входивший в неё вектор из исходной таблицы.

Доказательство. В силу однозначности процесса извлечения минимальных согласованных сегментов, если в подтаблице не появится ни один новый вектор, то число минимальных согласованных сегментов в подтаблице не может измениться, поэтому теорема верна.

Теорема 5. Общее число минимальных согласованных сегментов, полученных в ходе суперприведения таблицы задачи **ВЫП** (до первого появления исхода 2 или 3, или дополнительного вектора $\langle \theta_j \rangle$) не может быть больше m (числа строк исходной таблицы).

Доказательство. Эта теорема является прямым следствием теоремы 4.

Теорема 6. Общее число минимальных согласованных сегментов, полученных в ходе полного суперприведения таблицы задачи **ВЫП**, не может быть больше $m + q$, где q – число исходов 2а или 3а в ходе анализа таблицы.

Доказательство. Согласно замечанию 8 каждый выход на исход 2а или 3а приводит к расширению исходной таблицы вектором искомой дизъюнкции. Таким образом, если первоначально в исходной таблице было m строк, то после её расширения уже имеется $m + q$ строк (таблица уже противоречива). По теореме 5 получаем, что заключение этой теоремы верно.

Теорема 7. Класс NP -полных задач совпадает с классом задач P .

Доказательство. Известно (см. [3] и [2]), что если хотя бы одна NP -полная задача имеет полиномиальную временную сложность, то это верно и для любой NP -полной задачи. По теореме С.А.Кука задача **ВЫП** является NP -полной, а по теореме 5 процедура пополнения таблицы задачи **ВЫП** приводит лишь к полиномиальному росту числа векторов в таблице задачи **ВЫП** и тем самым к полиномиальному времени распознавания выполнимости.

§ 9. Проблема четырёх красок

Теоретическое применение идеи суперприведения рассмотрим на примере решения проблемы четырёх красок (ПЧК), которая хорошо известна (см. стр. 17 в [7]). Она имеет длинную историю, которую вряд ли можно считать оконченной (об этом ниже, в заключении), хотя известно, что в 1976 году Appel и Haken получили положительное её решение

с помощью ЭВМ, затратив достаточно много машинного времени. Но каково бы ни было состояние этой проблемы на сегодняшний день, решение, которое будет приведено ниже, не может не представлять интерес.

Необходимые определения и подробности относительно ПЧК можно найти в [7]. Здесь лишь отметим, что ПЧК достаточно разрешить не на общей карте, а лишь на кубической, для которой верно, что

$$2q = 3v, \quad s + v = q + 2, \quad (21)$$

где s – число стран, q – число границ и v – число вершин.

Для таких кубических карт сведём ПЧК к задаче **ВЫП**.

Понятно, что правильная 4–раскраска и нумерация стран карты четырьмя цифрами (так, чтобы страны, имеющие общую границу, имели разные номера) эквивалентны. Такую нумерацию удобно осуществлять с помощью двухразрядных двоичных чисел: x_{2i-1}, x_{2i} , где $x_{2i-1}, x_{2i} \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \dots, s$, то есть каждая из стран приобретает по одному из номеров четвёрки: 00; 01; 10; 11. Если страны, имеющие общую границу, имеют разные номера (что и требуется при правильной раскраске), то при поразрядном сложении по модулю 2 номеров стран можно получить только один из номеров: 01; 10; 11, то есть в результате этой операции номер 00 невозможен. А это значит, что если i -я и j -я страны граничат и имеют разные номера $x_{2i-1} x_{2i}$ и $x_{2j-1} x_{2j}$, то выражение

$$z_{ij} = z'_{ij} \vee z''_{ij}, \quad (22)$$

где

$$z'_{ij} = x_{2i-1} \oplus x_{2j-1}, \quad z''_{ij} = x_{2i} \oplus x_{2j}, \quad (23)$$

выполнимо. Легко заметить, что выражению (22) с учётом (23) можно придать вид:

$$\begin{aligned} z_{ij} = & (x_{2i-1} \vee x_{2i} \vee x_{2j-1} \vee x_{2j}) \cdot (\bar{x}_{2i-1} \vee x_{2i} \vee \bar{x}_{2j-1} \vee x_{2j}) \cdot \\ & \cdot (x_{2i-1} \vee \bar{x}_{2i} \vee x_{2j-1} \vee \bar{x}_{2j}) \cdot (\bar{x}_{2i-1} \vee \bar{x}_{2i} \vee \bar{x}_{2j-1} \vee \bar{x}_{2j}). \end{aligned} \quad (24)$$

Теперь ПЧК будет иметь положительное решение, если доказать существование выполняющего набора для **КНФ**:

$$f = \& z_{ij}, \quad (25)$$

где z_{ij} определены в (24) и конъюнкция берётся лишь по тем номерам стран $i, j \in \{1, 2, \dots, s\}$, которые имеют общую границу. Следует иметь ввиду, что границы карты нумеруются двухразрядными двоичными числами $z'_{ij} z''_{ij}$, определёнными в (23).

Если **КНФ** (25) придать табличный вид, то получим таблицу **ВЫП–4** (каждая строка таблицы имеет ранг 4), у которой число столбцов $n = 2s$ с номерами: 0, 1, 2, 3, ..., $2s - 2, 2s - 1$. Число строк таблицы $\leq 4q$ (согласно (21) и (24) должно равняться $4q$, но некоторые страны могут иметь по две и более границы с одинаковыми двухзначными двоичными числами $z'_{ij} z''_{ij}$).

Для примера рассмотрим карту с таким описанием.

Внутри круга расположены два треугольника с общей стороной. Каждая из вершин этих треугольников, лежащая против общей стороны, соединена отрезком с одной из двух точек, взятых на окружности.

Карта с таким описанием достаточно проста. Она имеет 5 стран: внешняя имеет две границы (дуги окружности), две страны по 3 границы и две страны по 5 границ (из них — две общих). Страны занумерованы соответственно: $x_1 x_2, x_3 x_4, x_5 x_6, x_7 x_8, x_9 x_{10}$.

В таблице 25 имеем табличное представление **КНФ** заданной карты.

Таблица 25

д	N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	$\bar{\tau}$	T					T	T		
	1	τ	T					T^*	T		
	2	$\bar{\tau}$	T^*					T	T^*		
	3	τ	T^*					T^*	T^*		
2	4	$\bar{\tau}$	T							T	T
	5	τ	T							T^*	T
	6	$\bar{\tau}$	T^*							T	T^*
	7	τ	T^*							T^*	T^*
3	8		$\bar{\tau}$	T	T	T					
	9		τ	T	T^*	T					
	10		$\bar{\tau}$	T^*	T	T^*					
	11		τ	T^*	T^*	T^*					
4	12		$\bar{\tau}$	T			T	T			
	13		τ	T			T^*	T			
	14		$\bar{\tau}$	T^*			T	T^*			
	15		τ	T^*			T^*	T^*			
5	16		$\bar{\tau}$	T					T	T	
	17		τ	T					T^*	T	
	18		$\bar{\tau}$	T^*					T	T^*	
	19		τ	T^*					T^*	T^*	
6	20				$\bar{\tau}$	T	T	T			
	21				τ	T	T^*	T			
	22				$\bar{\tau}$	T^*	T	T^*			
	23				τ	T^*	T^*	T^*			
7	24				$\bar{\tau}$	T			T	T	
	25				τ	T			T^*	T	
	26				$\bar{\tau}$	T^*			T	T^*	
	27				τ	T^*			T^*	T^*	
8	28					$\bar{\tau}$	T	T	T		
	29					τ	T	T^*	T		
	30					$\bar{\tau}$	T^*	T	T^*		
	31					τ	T^*	T^*	T^*		

Таблица 26

N ₁	N ₂	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	5		$\bar{\tau}$					T	T	T^*	T
1	4		$\bar{\tau}$					T^*	T	T	T
2	7		τ					T	T^*	T^*	T^*
3	6		τ					T^*	T^*	T	T^*
8	13			$\bar{\tau}$	T	T	T^*	T			
9	12			$\bar{\tau}$	T^*	T	T	T			
10	15			τ	T	T^*	T^*	T^*			
11	14			τ	T^*	T^*	T	T^*			
8	17			$\bar{\tau}$	T	T				T^*	T
9	16			$\bar{\tau}$	T^*	T				T	T
10	19			τ	T	T^*				T^*	T^*
11	18			τ	T^*	T^*				T	T^*
12	17			$\bar{\tau}$			T	T	T^*	T	T
13	16			$\bar{\tau}$			T^*	T	T	T	T
14	19			τ			T	T^*	T^*	T^*	T^*
15	18			τ			T^*	T^*	T	T^*	T^*
20	25					$\bar{\tau}$	T	T	T^*	T	
21	24					$\bar{\tau}$	T^*	T	T	T	
22	27					τ	T	T^*	T^*	T^*	T^*
23	26					τ	T^*	T^*	T	T^*	T^*

Таблица 27

д	N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0						0			
	1	1						1			
	2	2						2			
	3	3						3			
2	4			0						0	
	5			1						1	
	6			2						2	
	7			3						3	
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Таблица 26 является дополнением к таблице 25. В первых двух столбцах таблицы 26 указаны номера векторов из таблицы 25, резолюция над которыми дала соответствующий вектор строки. Таблица 25 с дополнением (таблица 26) — это суперприведённая таблица. Вывод: она выполнима, значит, выполнима и сама таблица 26, следовательно, карта раскрашивается в 4 цвета.

Прежде чем переходить от частной карты к случаю произвольной кубической карты, остановимся ещё на этом примере и обратим внимание на структуру как таблицы 25, так и таблицы 26. Внимательный взгляд позволит нам увидеть, что структура векторов таблиц содержит четыре элемента: 0; 1; 2; 3, где $0 \Leftrightarrow TT$, $1 \Leftrightarrow T^*T$, $2 \Leftrightarrow TT^*$, $3 \Leftrightarrow T^*T^*$, при этом $\bar{\tau}T$, τT , $\bar{\tau}T^*$, τT^* — это соответственно те же 0; 1; 2; 3. Кроме того, для векторов, имеющих начало в нечётном столбце, сохраним обозначения $\bar{\tau}$ и τ .

Принятые обозначения позволяют утверждать, что не только в таблице 25, но и в любой исходной таблице для каждой кубической карты векторы имеют одну из записей: $\langle 00 \rangle$, $\langle 11 \rangle$, $\langle 22 \rangle$, $\langle 33 \rangle$ (см. начало таблицы 25, представленное в таблице 27).

Векторы таблицы 26 (только начало её), в принятых обозначениях, представлены в таблице 28. Это векторы $\langle \bar{\tau} 01 \rangle$ и $\langle \tau 23 \rangle$. Строго говоря, нужно было бы указать ещё векторы $\langle \bar{\tau} 10 \rangle$ и $\langle \tau 32 \rangle$, но здесь и далее, как подразумевали в молчаливой форме некоторое чётное (включая и нуль) число продукций M (между цифрами 0, 1, 2 и 3), также будем подразумевать и перестановки из указанных цифр, не упоминая это.

Таблица 28

N_1	N_2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	5	$\bar{\tau}$						0		1	
1	4	$\bar{\tau}$						1		0	
2	7	τ						2		3	
3	6	τ						3		2	
8	13			$\bar{\tau}$		0		1			
9	12			$\bar{\tau}$		1		0			
10	15			τ		2		3			
11	14			τ		3		2			
8	17			$\bar{\tau}$		0					1
9	16			$\bar{\tau}$		1					0
10	19			τ		2					3
11	18			τ		3					2
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Теперь имеется готовность сформулировать те общие очевидные положения, которые верны для таблицы любой кубической карты.

1) Над любыми двумя согласованными векторами исходной таблицы, в начальном столбце дающие исход 1, выполняется резолюция и она записывается в дополнение таблицы.

2) Любая пара из векторов таблицы не будут согласованными, если у них в любом столбце, который не является для них начальным, имеется разноимённая пара из символов, определённых нами как 0; 1; 2; 3.

3) Поскольку верны равенства

$$\langle \bar{\tau}_r T \rangle \dot{\vee} \langle \tau_r T \rangle = \langle \bar{\tau}_{r+1} \rangle, \quad \langle \bar{\tau}_r T^* \rangle \dot{\vee} \langle \tau_r T^* \rangle = \langle \tau_{r+1} \rangle,$$

где $\dot{\vee}$ — символ резолюции, то для них будут подразумеваться соответственно записи

$$\langle 0 \rangle \dot{\vee} \langle 1 \rangle = \langle \bar{\tau} \rangle, \quad \langle 2 \rangle \dot{\vee} \langle 3 \rangle = \langle \tau \rangle,$$

которые возможны лишь для начальных столбцов векторов. Других резолюций над векторами, имеющими в начальных столбцах символы 0; 1; 2; 3 невозможны.

Теорема 8. В дополнение таблицы любой кубической карты либо нет векторов ранга меньше четырёх, либо содержится хотя бы один из векторов $\langle \bar{\tau} 0 \rangle$, $\langle \bar{\tau} 1 \rangle$, $\langle \tau 2 \rangle$, $\langle \tau 3 \rangle$ ранга три, но векторов меньшего ранга быть не может.

Доказательство. Как указывалось выше, векторы

$$\langle 00 \rangle, \quad \langle 11 \rangle, \quad \langle 22 \rangle, \quad \langle 33 \rangle \tag{26}$$

составляют список всех возможных векторов исходной таблицы.

Теперь одно общее очевидное замечание. Если над двумя векторами таблицы с рангами R_1 и R_2 , где $R_1 \geq R_2$, возможна и выполняется резолюция, то для минимального возможного ранга R резолюции над этими векторами верно

$$R \geq R_1 - 1. \quad (27)$$

Для верности теоремы важен знак равенства в (27).

Резолюции, если они возможны над векторами (26), могут давать один из векторов

$$\langle \bar{\tau} 0 1 \rangle, \quad \langle \tau 2 3 \rangle, \quad (28)$$

что наблюдалось в иллюстрационном примере, где других векторов нет. Разумеется, что могут быть более сложные карты, где резолюции возможны над векторами (28), и такие резолюции будут приводить к векторам

$$\langle 0 1 2 3 \rangle.$$

Но более важным является то, что не исключены такие резолюции:

$$\begin{aligned} \langle 0 1 2 3 \rangle \dot{\vee} \langle 1 1 \rangle &= \langle \bar{\tau} 1 2 3 \rangle, & \langle 0 1 2 3 \rangle \dot{\vee} \langle 3 3 \rangle &= \langle \tau 0 1 3 \rangle, \\ \langle \bar{\tau} 1 2 3 \rangle \dot{\vee} \langle \tau 2 3 \rangle &= \langle 1 2 3 \rangle, & \langle \tau 0 1 3 \rangle \dot{\vee} \langle \bar{\tau} 0 1 \rangle &= \langle 0 1 3 \rangle, \\ \langle 0 1 3 \rangle \dot{\vee} \langle 1 1 \rangle &= \langle \bar{\tau} 1 3 \rangle, & \langle 1 2 3 \rangle \dot{\vee} \langle 3 3 \rangle &= \langle \tau 1 3 \rangle, \\ \langle \bar{\tau} 1 3 \rangle \dot{\vee} \langle \tau 1 3 \rangle &= \langle 1 3 \rangle, \end{aligned} \quad (29)$$

говорящие о том, что векторы ранга 4:

$$\langle 0 1 \rangle, \quad \langle 0 2 \rangle, \quad \langle 0 3 \rangle, \quad \langle 1 2 \rangle, \quad \langle 1 3 \rangle, \quad \langle 2 3 \rangle \quad (30)$$

не исключены, хотя в (29) показано, как мог получиться лишь один из них.

Для завершения доказательства осталось увидеть, что векторы ранга три могут получиться лишь в результате таких выкладок:

$$\begin{aligned} \langle 0 1 \rangle \dot{\vee} \langle 0 0 \rangle &= \langle \bar{\tau} 0 \rangle, & \langle 0 1 \rangle \dot{\vee} \langle 1 1 \rangle &= \langle \bar{\tau} 1 \rangle, \\ \langle 2 3 \rangle \dot{\vee} \langle 2 2 \rangle &= \langle \tau 2 \rangle, & \langle 2 3 \rangle \dot{\vee} \langle 3 3 \rangle &= \langle \tau 3 \rangle. \end{aligned} \quad (31)$$

Можно говорить, что все остальные резолюции над векторами (26) и (30) не могут дать вектор ранга три. Резолюции же над векторами правых частей (31), если они возможны, то дают векторы, принадлежащие совокупности (30). Теорема доказана.

Из этой теоремы и следует положительное решение проблемы четырёх красок.

Заключение

В завершении этой работы добавим следующие три оправдательных замечания.

1) Некоторые непривычные обозначения (позиционные символы операций $\bar{\vee}$, $\bar{\wedge}$ для конъюнкции и дизъюнкции соответственно) объясняется извлечением вспомогательного материала из [ПП] с минимальными изменениями.

2) Как лучше всего выполнять сегментацию исходной таблицы на 2, 3, 4, ... подтаблицы, чтобы выполнить суперприведение посегментно? Этот вопрос остался открытым. Но не всегда требуется выполнять сегментацию, поскольку всякое сложное устройство состоит из частей (агрегатов, блоков, модулей, ...) и, таким образом, сегментация как бы получается "естественной". Что даёт такая "естественная" сегментация? — иллюстрируется на примере задачи, полный текст которой размещён на моём

сайте <http://www.tarusa.ru/~mit>. Здесь отметим лишь, что представленная там задача **ВЫП** состоит из следующих трёх блоков (КНФ) с переменными: I блок от 0 до 49; II блок от 47 до 96; III блок от 94 до 143 (то есть имеется перекрытие). Блоки имеют: 215, 214 и 215 строки соответственно. Вся задача имеет 144 переменных и 644 строки и её суперприведение выполняется за 6 мин 45 секунд (Pentium-866). Суперприведение же каждого блока составляет 3, 5 и 6 сек и совместное суперприведение всех трёх суперприведённых блоков: 22 сек, то есть полное суперприведение (с применением сегментации) 36 сек и итоговая суперприведённая КНФ имеет 144 переменных и 281 строку (против исходной: 144 переменных и 644 строки).

3) Зачем решать проблему четырёх красок, если она уже решена? Ответ содержится в отношении математиков к такому решению. Оно однозначно выражено филдсовским лауреатом 1966 года Александром Гротендиком (см. [1] стр. 255): *"... совсем из ряда вон выходящая история произошла с "решением" так называемой проблемы четырёх красок. Его "вычислили" при помощи компьютера (в нескольких миллионах долларов). ... Даже если расчёт будет подтверждён при проверке на других компьютерах, другими программами, я всё равно не соглашусь признать проблему четырёх красок закрытой"*.

Автор выражает искреннюю признательность А.А.Фомину за подготовку электронной версии этой статьи.

Список литературы

1. Гротендик А. Урожай и посеvy. Ижевск: НИЦ, 2002.
2. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
3. Куж С.А. Сложность процедур вывода теорем // Киб. сб. нов. сер., вып 12. – М.: Мир, 1975, с. 5 – 15.
4. Тельпиз М.И. Позиционные принципы представления функций алгебры логики. Препринт / АН СССР. Научный совет по комплексной проблеме "Кибернетика". М.: 1984.
5. Тельпиз М.И. Представление функций алгебры логики // Кибернетика. Киев: 1985, N 4, с. 37 – 40, 51.
6. Тельпиз М.И. Позиционные операторы и преобразования в алгебре логики. Препринт / АН СССР. Научный совет по комплексной проблеме "Кибернетика". М.: 1985.
7. Харри Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973.